UNIVERSIDAD DEL NORTE
Departamento de Matemáticas y Estadística

Departamento de Matemáticas
Ecuaciones Diferenciales

Taller 3 2024-30

Transformada de Laplace y aplicaciones

4 de noviembre de 2024

1. Resolver los siguientes ejercicios del texto guía. Allí se indica primero la Sección y después de los dos puntos los ejercicios sugeridos:
   a) 7.1: 19-36, 41.
   b) 7.2: 2,15,16,22, 25-30, 37-40.
   c) 7.3: 9,10,15,16,17,19,20, 27-30, 37-48, 63-75.
   d) 7.4: 7-14, 19-32, 37-46, 49-62.

2. Evalúe
   a) $\mathcal{L}\{e^t \sin 3t\}$.
   b) $\mathcal{L}\{e^{3t}(9 - 4t + 10\sin\frac{t}{2})\}$.
   c) $\mathcal{L}\{t(e^t + e^{2t})^2\}$.
   d) $\mathcal{L}\{(t-1)\mathcal{U}(t-1)\}$.
   e) $\mathcal{L}\{e^{2-t}\mathcal{U}(t-2)\}$.
   f) $\mathcal{L}\{\sin t\, \mathcal{U}(t-\frac{\pi}{2})\}$.
   g) $\mathcal{L}\{\cos t\, \mathcal{U}(t-\pi)\}$.

3. Evalúe
   a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s+5}{s^2+6s+34}\right\}$.
   b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+4s+5}\right\}$.
   c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{5}{s(s^2+2s+5)}\right\}$.
   d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{5}{s(s^2+2s+5)}e^{-3s}\right\}$.

e) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{13}{s(s^2+6s+13)}\right\}$.

f) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{13}{s(s^2-6s+13)}e^{-5s}\right\}$.

g) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s+1)}e^{-s}\right\}$.

h) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2(s+1)}e^{-2s}\right\}$.

4. Resuelva el PVI dado.

a) $y' + y = f(t)$, $y(0) = 0$, donde

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1 \\ -1, & t \ge 1. \end{cases}$$

b) $y' + 2y = f(t)$, $y(0) = 0$, donde

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1 \\ 0, & t \ge 1. \end{cases}$$

c)
- Demuestre que $\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{3}{s} - \dfrac{6}{s}e^{-s}$ donde $f(t) = \begin{cases} 3 & \text{si } \; 0 \le t < 1 \\ -3 & \text{si } \; t \ge 1. \end{cases}$
- Demuestre que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{6}{s(s^2+4s+6))}\right\} = 1 - e^{-2t}\cos(\sqrt{2}t) - \sqrt{2}\,e^{-2t}\sin(\sqrt{2}t)$.
- Demuestre que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{6}{s(s^2+4s+6)}e^{-s}\right\} = \mathcal{U}(t-1) - e^{-2(t-1)}\cos\sqrt{2}(t-1)\cdot\mathcal{U}(t-1) - \sqrt{2}e^{-2(t-1)}\sin\sqrt{2}(t-1)\cdot\mathcal{U}(t-1)$.
- Resuelva el PVI

$$x'' + 4x' + 6x = f(t), \quad x(0) = 0,\ x'(0) = 0.$$

donde $f(t)$ es la función del inciso *a*).

d)
- Demuestre que $\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1}{s} - \dfrac{2}{s}e^{-s}$ donde $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \; 0 \le t < 1 \\ -1 & \text{si } \; t \ge 1. \end{cases}$
- Demuestre que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s+1)}\right\} = 1 - e^{-t}$.
- Demuestre que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s+1)}e^{-s}\right\} = \mathcal{U}(t-1) - e^{-(t-1)}\mathcal{U}(t-1)$.
- Resuelva el PVI

$$y' + y = f(t), \quad y(0) = 0,$$

donde $f(t)$ es la función del inciso *a*).

e)
- Demuestre que $\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{2}{s} - \dfrac{4}{s}e^{-s}$ donde $f(t) = \begin{cases} 2 & \text{si } \; 0 \le t < 1 \\ -2 & \text{si } \; t \ge 1. \end{cases}$

- Demuestre que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s+1)}e^{-s}\right\} = \mathcal{U}(t-1) - e^{-(t-1)}\mathcal{U}(t-1)$.
- Resuelva el PVI
$$y' + y = f(t), \quad y(0) = 0,$$
donde $f(t)$ es la función del inciso a).

5. Use únicamente argumentos de transformada de Laplace para resolver los siguientes problemas de masa-resorte. (Aceleración de la gravedad: 32 pies/s^2 o 10 m/s^2)

   a) Una masa de un kilogramo estira un resorte 10/13 mts. Al inicio la masa se libera desde el reposo en la posición de equilibrio y el movimiento posterior toma lugar en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a 6 veces la velocidad instantánea. Una fuerza externa de $f(t) = 13 - 26\mathcal{U}(t-5)$ actúa sobre la masa. Encuentre la ecuación del moviemento.

   b) Una masa que pesa 32 libras estira un resorte 32/5 pies y se sumerge en un medio que imparte una fuerza viscosa de 10 libras cuando la velocidad de la masa es 2 pies/s. Si en el instante inicial $t = 0$ la masa parte del del reposo desde la posición de equilibrio y sobre este sistema masa-resorte actúa una fuerza externa $f(t)$ dada por
$$f(t) = \begin{cases} 5, & 0 \leq t < 3 \\ -5, & t \geq 3 \end{cases}$$
determine la solución del problema de valor inicial que describe el movimiento de la masa.

   c) Una masa que pesa 32 libras estira un resorte 32 pies. Si el peso se libera a partir del reposo y desde la posición de equilibrio, determine la ecuación del movimiento $x(t)$ si no hay fuerzas de amortiguamiento y sobre el sistema actúa una fuerza externa de
$$f(t) = \begin{cases} \cos 2t, & 0 \leq t < 2\pi \\ 0, & t \geq 2\pi. \end{cases}$$

   d) Una masa de 1/4 slug, cuando se une a un resorte, causa en éste un alargamiento de 8 pies y luego llega al punto de reposo en la posición de equilibrio. Empezando en $t = 0$, una fuerza externa de
$$f(t) = \begin{cases} \frac{t}{4}, & 0 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$$
se aplica al sistema. Encuentre la ecuación del movimiento $x(t)$ si el medio circundante ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a la velocidad instanánea.

   e) Suponga que un peso de 32 libras estira un resorte 2 pies. Si el peso se libera a partir del resposo en la posición de equilibrio, determine la ecuación del movimiento $x(t)$ si una fuerza de
$$f(t) = \begin{cases} 20t, & 0 \leq t < 5 \\ 0, & t \geq 5 \end{cases}$$
actúa sobre el sistema. Desprecie cualquier fuerza de amortiguamiento.

   f) Resuelva el problema anterior si la fuerza aplicada en este caso es
$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t < 2\pi \\ 0, & t \geq 2\pi. \end{cases}$$

g) Una fuerza de 10 newtons alarga 10 metros un resorte. Una masa de 1 kilogramo se une al extremo del resorte y se libera desde la posición de equilibrio con una velocidad descendente de 1 m/s. Determine la ecuación del movimiento $x(t)$ si no hay fuerzas de amortiguamiento y sobre el sistema actúa una fuerza externa de

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \pi \\ 1, & \pi \leq t < 2\pi \\ 0, & t \geq 2\pi. \end{cases}$$

h) Una masa que pesa 30 newtons estira un resorte 10 metros y se sumerge en un medio que imparte una fuerza viscosa de 4 N cuando la velocidad de la masa es 2 m/s. Si en el instante inicial $t = 0$ la masa parte del del reposo desde la posición de equilibrio y sobre este sistema masa-resorte actúa una fuerza externa $f(t)$ (en N) dada por

$$f(t) = \begin{cases} 72t, & 0 \leq t < 1 \\ 72, & t \geq 1 \end{cases}$$

determine la solución del problema de valor inicial que describe el movimiento de la masa.

6. Determine la solución de las siguientes ecuaciones integrales e integro-diferenciales

a)
$$y'(t) = \cos t + \int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)d\tau, \quad y(0) = 1.$$

b)
$$\int_0^t f(\tau)f(t-\tau)d\tau = 6t^3.$$

c)
$$y'(t) = 1 - \sin t - \int_0^t y(\tau)d\tau, \quad y(0) = 0.$$

d)
$$\frac{dy}{dt} + 6y(t) + 9\int_0^t y(\tau)d\tau = 1, \quad y(0) = 0.$$

e)
$$y'(t) + 2y + \int_0^t y(\theta)d\theta = 1, \quad y(0) = 0.$$

f)
$$f(t) + \int_0^t f(y)(t-y)\,dy = t.$$

g)
$$t - 2f(t) = \int_0^t f(t-y)(e^y - e^{-y})\,dy.$$

h)
$$f(t) + 2\int_0^t f(\tau)\cos(t-\tau)\,d\tau = 4e^{-t} + \sin t.$$

i)

$$f(t) = 1 + t + \frac{8}{3}\int_0^t (t-y)^3 f(y)\,dy.$$

j)

$$f(t) = te^t + \int_0^t \tau f(t-\tau)\,d\tau.$$

k)

$$f(t) = 2t - 4\int_0^t \sin\tau f(t-\tau)\,d\tau.$$

l)

$$f(t) + 3\int_0^t f(y)\sin(t-y)\,dy = -3\int_0^t \sin(2y)\sin(t-y)\,dy.$$

m)

$$f(t) - 2\int_0^t f(y)\sin(2(t-y))dt = t - \cos t\mathscr{U}\left(t-\frac{\pi}{2}\right).$$

n)

$$f'(t) + 13\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x - 6f(t) = 13t + 13(t-2)\mathscr{U}(t-2), \quad f(0) = 0.$$

ñ)

$$f'(t) + 18\int_0^t f(x)\,dx - 6f(t) = 18t + 18(t-3)\mathscr{U}(t-3), \quad f(0) = 0.$$

7. En una sola malla o circuito en serie LRC, la segunda ley de Kirchhoff establece que la suma de las caídas de voltaje en un inductor, resistor y capacitor es igual al voltaje aplicado $E(t)$. Ahora bien, se sabe que las caídas de voltaje en un inductor, resistor y capacitor son, respectivamente,

$$L\frac{di}{dt}, \quad Ri(t), \quad \frac{1}{C}q(t),$$

donde $i(t)$ es la corriente y L, R y C son constantes. Como la carga $q(t) = \int_0^t i(\tau)d\tau$, se deduce que la corriente en el circuito LRC está gobernada por la **ecuación integrodiferencial**

$$L\frac{di}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau = E(t).$$

Determine la corriente $i(t)$ en un circuito LRC de un sola malla cuando:

a) $L = 0{,}1$ h, $R = 3\ \Omega$, $C = 0{,}05$ f, $E(t) = 100[\mathscr{U}(t-1)) - \mathscr{U}(t-2)]$, $i(0) = 0$.

b) $L = 0{,}005$ h, $R = 1\ \Omega$, $C = 0{,}02$ f, $E(t) = 100[t - (t-1)\mathscr{U}(t-1)]$, $i(0) = 0$.