Departamento de Matemáticas y Estadística
Ecuaciones Diferenciales

Taller 1

1 de agosto de 2024

1. Resolver los siguientes ejercicios del texto guía. Allí se indica primero la Sección y después de los dos puntos los ejercicios sugeridos:

   a) 1.1: 1-36, 47, 48.
   b) 1.2: 1-14.
   c) 2.2: 1-30.
   d) 2.3: 1-36.
   e) 2.4: 1-20, 25-38, 42.
   f) 3.1: 1-10, 13-20.
   g) 3.2: 1-4.

2. Clasifique las siguientes ecuaciones diferenciales.

   a) $\sin(y') - y' = x + 3$.
   b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 = x^2 + \ln x$.
   c) $\dfrac{d}{dx}\left(x\dfrac{dy}{dx}\right) + x^2y = 0$.
   d) $u_{ttt} + au_{xx} = 0$.

3. Inicialmente un cultivo tiene un número P_0 de bacterias. Una hora después se determina que el número de baterías es cuatro veces la cantidad inicial. Si la razón de crecimiento es proporcional al número de bacterias $P(t)$ presentes en el tiempo t, determine: a) el tiempo necesario para que se quintuplique el número de bacterias. b) el número de bacterias que hay 3 horas después, si al inicio hay 500 bacterias.

4. Inicialmente había 200 miligramos de una sustancia radiactiva. Después de 5 horas la masa disminuyó 4 %. Si la razón de decaimiento, en cualquier momento, es proporcional a la cantidad de la sustancia presente al tiempo t, determine la cantidad que queda después de 36 horas.

5. Al sacar un pastel del horno, su temperatura es 160° C. Cinco minutos después su temperatura es de 80° C. ¿Cuánto tiempo le tomará al pastel enfriarse hasta la temperatura de 40° C si la temperatura ambiente es de 30° C?

6. Una barra de metal, cuya temperatura inicial era de 40° C, se deja caer en un gran tanque de agua hirviendo. ¿Cuánto tiempo tardará la barra en alcanzar el doble de su temperatura inicial si se sabe que su temperatura aumentó 3° en 2 segundos? ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzar los 96° C?

7. Si la población de una ciudad crece de 1.200.000 habitantes a 1.800.000 habitantes en 4 años, ¿Cuál será la población después de 12 años? Resp/ 4.050.000 habitantes.

8. Usando medidas muy cuidadosas del elemento radiactivo Patakium, un investigador encuentra que el 2 por ciento de su muestra se descompone en 3 horas. Encuentra la vida media de Patakium.

9. Un estudiante portador de Covid regresa a su campus aislado de 3000 estudiantes y se observa que después de tres días hay 8 estudiantes infectados. Si se supone que la razón con que se propaga el virus es proporcional no sólo a la cantidad x de estudiantes infectados (a los t días) sino también a la cantidad de estudiantes no infectados, entonces:

   a ¿Plantee un problema de valor inicial (PVI) que modele el número de personas infectadas $x(t)$.
   (compare con el Ejemplo 1 de la Section 3.2 del texto guía).

   b ¿Qué representa $x(3)$ y cuál es su valor?

   c ¿Cuántos estudiantes estarán infectados después de cinco días?

   d ¿Cuál es la capacidad de carga de estudiantes infectados?

   e ¿Cuántos infectados hay en el campus cuando su razón de crecimiento es máxima?

10. En un municipio de 10000 habitantes ocurre un brote de gripe. Cuando la secretaría de salud empieza a registrar los casos hay solo 20 infectados. Una semana después hay 40 infectados. Suponga que $I(t)$ representa el número de personas infectadas después de t semanas y su crecimiento es logístico.

   a ¿Plantee un problema de valor inicial (PVI) que modele el número de personas infectadas $I(t)$.

   b ¿Qué representa $I(1)$ y cuál es su valor?

   c ¿En cuántas semanas la población llegará a 1000 infectados?

   d ¿Cuál es la capacidad de carga de la población?

   e ¿Cuántos infectados hay en la población cuando su razón de crecimiento es máxima?

   f ¿En cuánto tiempo la población infectados se triplica?

11. En la tabla se presentan los datos del censo de los Estados Unidos entre 1790 y 1950. *a*) Use el modelo de Verhulst y los datos de 1790, 1850 y 1910 para predecir la población en los años que aparecen en la tabla. *b*) Compare los resultados del inciso *a*) con los de la tabla y calcule los errores absolutos y los errores relativos porcentuales.

Año	Población (en millones)
1790	3.929
1800	5.308
1810	7.240
1820	9.638
1830	12.866
1840	17.069
1850	23.192
1860	31.433
1870	38.558
1880	50.156
1890	62.948
1900	75.996
1910	91.972
1920	105.711
1930	122.775
1940	131.669
1950	150.697

12. La población $P(t)$ de ratones en una pradera después de t años satisface la ecuación diferencial logística $\frac{dP}{dt} = 60P\left(0{,}02 - \frac{P}{200000}\right)$, donde la población inicial es de 100 ratones.

    a ¿Cuál es la capacidad de carga de la población de ratones en la pradera?

    b ¿Cuántos ratones hay en la población cuando su razon de crecimiento es máxima? ¿En qué instante esto ocurre?

    c ¿Cuántos ratones hay en la pradera después de 8 años?

    d ¿En cuánto tiempo la población de ratones se duplica?

13. Un demógrafo estima que factores ambientales ponen un límite superior de 10 millones de personas a la población de cierto país. En cada momento t, la población $P(t)$ está creciendo a una razón que es conjuntamente proporcional a la población actual P y a la diferencia entre el límite superior y P. Suponga que la población de este país era de 4 millones en 2000 y 7.4 millones en 2004.

    a ¿Plantee un problema de valor inicial (PVI) que modele el número de personas $P(t)$ de la población.

    b Use la notación $P(t)$ para escribir de forma matemática la afirmación “la población de este país era de 4 millones en 2000 y 7.4 millones en 2004”.

    c Halle $P(t)$

    d ¿Cuál será el tamaño de la población en el 2010?

14. El número $P(t)$ de personas que han adoptado una cierta moda después t meses de haberse publicado por los Medios satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}25P\left(0{,}4 - \frac{P}{12000000}\right)$$

.

Inicialmente, hubo 5000 personas que optaron la moda.

a ¿Cuál es la capacidad de carga de la población que puede adoptar la moda?

b ¿Cuántas personas optarán por la moda cuando su razón de crecimiento es máxima? ¿En qué instante esto ocurre?

c ¿En cuánto tiempo la población que optará por la moda se cuadriplica?

15. Dos monos son colocados en una isla. Después de 5 años, hay 8 monos, y la capacidad de carga estimada es de 25 monos. ¿Cuándo alcanza la población 16 monos? Rta: 8 años y 11 meses aprox.

16. Una sustancia se enfría de 80° C a 60° C en 20 minutos. Si la temperatura del medio que la rodea es de 20° C, ¿cuál es la temperatura de la sustancia al cabo de 40 minutos? Resp/ 47° C.

17. En 1993 la población mundial había alcanzado 5,5 billones y en ese entonces fue creciendo a razón de 250.000 personas por día. Suponiendo que las tasas de nacimientos y muertes son constantes, ¿En qué momento la población alcanzará los 11 billones de personas? Resp/ Aprox. En 42 años (es decir, en el año 2035). **Nota**: En 1974, el gobierno británico oficialmente declaró que un billón representaba el número 10^9, pasando, por lo tanto, a coincidir con la histórica acepción estadounidense de esa palabra.

18. Un pollo de 4 libras tiene una temperatura inicial de 50° F y se coloca en un horno a 375° F a las 5:00 pm. Después de 75 minutos se observa que la temperatura del pollo $T(t)$ es de 125° F. ¿Cuándo la temperatura del pollo alcanzará los 150° F (término medio)? Resp/ Aprox. En 105 minutos.

19. Una cerveza fría inicialmente a 2° C se calienta a 5° C en 3 min mientras está sentada en una habitación a una temperatura de 20° C. ¿Qué tan caliente estará la cerveza si se deja afuera por 20 minutos?

20. Un vino blanco a temperatura ambiente de 20° C se enfría en hielo (0° C). Si el vino tarda 15 min en enfriarse a 15° C , ¿cuánto tiempo tardará en alcanzar los 12° C?

21. Un tanque con capacidad de 300 galones contiene inicialmente 100 galones de agua pura. Al tanque se vierte salmuera (mezcla de sal y agua) que contiene 2 libras de sal por galón a razón de 4 galones por minuto. La solución bien mezclada sale del tanque a razón de 7 galones por minuto.

    a) Determine la candidad de sal que ingresa al tanque en los primeros tres minutos.

    b) Determine el volumen de solución presente en el tanque a los 5 minutos.

    c) Escriba un problema de valor inicial (PVI) que permita determinar la cantidad de libras de sal que hay presente en el tanque en cualquier instante de tiempo t antes que el tanque quede vacío.

22. Una tanque de 120 galones contiene inicialmente 90 libras de sal disueltas en 90 galones de agua. Salmuera que contiene 2 lib/gal de sal fluye al tanque a una razón de 4 gal/min, y bien mezclada sale del tanque a una razón de 3 gal/min. ¿Cuánta sal hay en el tanque cuando éste está lleno?
    Resp/ $240 - \frac{90^4}{120^3} \approx 202$ **libras.**

23. Un tanque con capacidad de 400 galones contiene inicialmente 160 galones de salmuera (solució salina) en los que se han disuelto 40 libras de sal. Al tanque se vierte agua pura a razón de

5 galones por minuto. La solución bien mezclada sale del tanque a razón de 3 galones por minuto.

a) Determine la concentración de sal que hay en el tanque al inicio.

b) Determine el instante en que el tanque está por a mitad de su capacidad.

c) ¿En qué instante se llena el tanque?

d) Escriba un problema de valor inicial (PVI) que permita determinar la cantidad de libras de sal que hay presente en el tanque en cualquier instante de tiempo t antes que se llene.

24. Un tanque contiene inicialmente 300 galones de agua en los que se han disuelto 50 libras de sal. Otra solución salina que tiene $c_{\mathrm{e}}(t) = 2 + \sin(t/4)\,\dfrac{\mathrm{lib}}{\mathrm{gal}}$ entra al tanque a una velocidad de 3 gal/min y sale a razón 2 gal/min. Halle la ecuación que expresa la cantidad de sal que hay en el tiempo t, $x(t)$.

25. Un tanque contiene 500 galones de una solución de agua salada que contiene 0.05 libras de sal por galón de agua. Agua pura es vertida en el tanque y drena en el fondo del tanque de modo que el volumen permanece constante. ¿A qué razón **R** gal/min debería ser vertida el agua el tanque para tener una concentración de sal **C** de 0.01 lib/gal en una hora?
Resp/ R $= \frac{25}{3}\ln 5$.

26. Suponga que el Lago Erie tiene volumen de 480 km^3. La razón de entrada del Lago Huron al Lago Erie es de 350 km^3 por año. La razón de salida del Lago Erie al lago Ontario es la misma. En el tiempo ($t = 0$ en años), la concentración del contaminante del Lago Erie- causado por el paso de contaminantes industriales es cinco veces la del lago Huron. Si el flujo de salida está perfectamente mezclado en el agua del lago, ¿cuánto tiempo tomará en reducir la concentración de contaminantes en el Lago Erie a dos veces la del Lago Huron?
Resp/ $t = \frac{480}{350}\ln 4$ **años.**

27. Un tanque está lleno de 100 litros de agua en los que se han disuelto 20 kilogramos de sal. Otra mezcla que contiene 1 kilogramo de sal por litro es bombeada al tanque a razón de 7 litros por minuto. La solución mezclada es bombeada hacia el exterior a razón de 8 litros por minuto.

a) ¿Cuál es el volumen después de 20 minutos?

b) ¿Cuál es el tiempo de vaciado del tanque?

c) Determine la función que da la cantidad de sal en cada instante.

d) ¿Cuánta cantidad de sal hay en el tanque después de 20 minutos? ¿Cuál es la concentración en este instante?

Resp/ a) 80 litros, b) t=100 litros, c) $x(t) = 100 - t - 80(1 - \frac{t}{100})^8$**.**

28. Una batería de 12.5 voltios se conecta a un circuito en serie en el que el inductor es de 1/2 henrios y la resistencia es de 9.5 ohmios. Determine la corriente i después de tres segundos, si la corriente inicial es cero.

29. Se aplica una fuerza electromotriz de 25 voltios a un circuito en serie LR con 0.1 henrios de inductancia y 60 ohmios de resistencia. Determine la corriente $i(t)$, si la correinte inical es cero. Determine la corriente conforme $t \to \infty$.

30. Se aplica una fuerza electromotriz de 500 voltios a un circuito RC, en el que la resistencia es de 1000 ohmios y la capacitancia es de 2×10^{-5} faradios. Determine la carga $q(t)$ en el capacitor, si $i(0) = 0{,}6$ amperios. Determine la carga y la corriente cuando $t = 0{,}01$ segundos. Además, encuentre la carga conforme $t \to \infty$.

31. Se aplica una fuerza electromotriz $E(t) = 120t$, $0 \leq t \leq 20$, a un circuito en serie LR en el que la inductancia es de 20 henrios y la resistencia es de 2 ohmios. Si el tiempo t está medido en segundos, determine la corriente i después de 10 segundos, si la corriente inical es cero.

32. Considere las siguientes ecuaciones diferenciales:

    a) $(y^2 + 2xy)dx - x^2dy = 0$.
    b) $(2xy + 2y^3)dx + (3x^2 + 10xy^2)dy = 0$.
    c) $(y + \cos^2 x)dx + (\frac{3}{2}x + xy + \frac{1}{2}\sin x \cos x)dy = 0$.
        1) Demuestre que no son exactas.
        2) Halle un factor integrante.
        3) Halle la solución general en cada caso.

33. Las siguientes ecuaciones diferenciales tienen un factor integrante de la forma $\mu(x, y) = x^a y^b$. Halle los valores exactos de a y b. Halle la solución general.

    a) $(2x^2y + y^2)dx + (2x^3 - xy)dy = 0$.
    b) $x(4y\,dx + 2x\,dy) + y^3(3y\,dx + 5x\,dy) = 0$.

34. Halle la solución de cada uno de los siguientes problemas de valor inicial

    a) $(x^2 - 1)\dfrac{dy}{dx} + 2y = (x + 1)^2, \quad y(0) = 1$.
    b) $\cos y\,dx + (1 + e^{-x})\sin y\,dy = 0, \quad y(0) = \frac{\pi}{4}$.
    c) $ydx + x(\ln x - \ln y - 1)dy = 0, \quad y(1) = e$.

35. Se dice que un ED de orden 1 es de coeficientes homogéneos si al escribirla de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1}$$

resulta que la función $f(x, y)$ es homogénea de grado cero, esto es, que $f(tx, ty) = f(x, y)$ para todo $t > 0$. Cualquiera de las siguientes dos sustituciones: *i*) $y = ux, dy = udx + xdu$ o *ii*) $x = vy, dx = vdy + ydv$ en una ED de coeficientes homogéneos la transforma en una ED separable (ver Ejemplo 1 de la Sección 2.5 del texto guía).
Resuelva las siguientes ecuaciones de coeficientes homogéneos.

    a) $(3y^2 + 4xy - x^2)dx - (2x^2 + 2xy)dy = 0$, (use la sustición en *i*)).
    b) $(x^3 - x^2y - 10xy^2 - 3y^3)dx + (3xy^2 + 7x^2y)dy = 0$, (use la sustición en *i*)).
    c) $[4x\cos(y/x) - 3x\sin(y/x) - y]dx + xdy = 0$, (use la sustición en *i*)).
    d) $x(2y^4 - x^4)\dfrac{dy}{dx} = y(y^4 - x^4)$, (use la sustición en *i*)).
    e) $y(\ln x - \ln y)dx = (x\ln x - x\ln y - y)dy$, (use la sustición en *ii*)).

36. Se dice que un ED de orden 1 es de Bernoulli si se puede escribir de la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)y^n, \tag{2}$$

donde n s una constante real. Note que si n es diferente de 0 y 1, entonces la ED es no lineal. En este caso, demuestre que la sustitución

$$u = y^{1-n}, \quad \frac{du}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}, \tag{3}$$

transforma la ED (2) en la ED lineal

$$\frac{du}{dx} + (1-n)P(x)u = (1-n)f(x), \tag{4}$$

ver Ejemplo 2 de la Sección 2.5 del texto guía.
Use las indicaciones anteriores para resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de Bernoulli.

a) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{6}{x^2-1}y = \dfrac{3(x+1)}{(x-1)\sqrt{x^2+1}}y^{2/3}.$

b) $-2\dfrac{dy}{dx} + (\ln x)y = \ln x\left[\dfrac{2}{x} + (\ln x)^2\right]y^3.$

c) $(x+1)^2\sqrt{y}\dfrac{dy}{dx} = xe^{3x/2} - (1-x^2)y\sqrt{y}.$