

Departamento de Matemáticas
Ecuaciones Diferenciales

Taller 3 2024-10

Transformada de Laplace y aplicaciones

29 de abril de 2024

1. Resolver los siguientes ejercicios del texto guía. Allí se indica primero la Sección y después de los dos puntos los ejercicios sugeridos:

- a) 7.1: 19-36, 41.
- b) 7.2: 2,15,16,22, 25-30, 37-40.
- c) 7.3: 9,10,15,16,17,19,20, 27-30, 37-48, 63-75.
- d) 7.4: 7-14, 19-32, 37-46, 49-62.

2. Evalúe

- a) $\mathcal{L}\{e^t \sin 3t\}$.
- b) $\mathcal{L}\{e^{3t}(9 - 4t + 10 \sin \frac{t}{2})\}$.
- c) $\mathcal{L}\{t(e^t + e^{2t})^2\}$.
- d) $\mathcal{L}\{(t - 1)\mathcal{U}(t - 1)\}$.
- e) $\mathcal{L}\{e^{2-t}\mathcal{U}(t - 2)\}$.
- f) $\mathcal{L}\{\sin t \mathcal{U}(t - \frac{\pi}{2})\}$.
- g) $\mathcal{L}\{\cos t \mathcal{U}(t - \pi)\}$.

3. Evalúe

- a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s + 5}{s^2 + 6s + 34}\right\}$.
- b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 4s + 5}\right\}$.
- c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s(s^2 + 2s + 5)}\right\}$.
- d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s(s^2 + 2s + 5)}e^{-3s}\right\}$.
- e) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{13}{s(s^2 + 6s + 13)}\right\}$.

$$f) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{13}{s(s^2 - 6s + 13)} e^{-5s} \right\}.$$

$$g) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s+1)} e^{-s} \right\}.$$

$$h) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2(s+1)} e^{-2s} \right\}.$$

4. Resuelva el PVI dado.

a) $y' + y = f(t)$, $y(0) = 0$, donde

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ -1, & t \geq 1. \end{cases}$$

b) $y' + 2y = f(t)$, $y(0) = 0$, donde

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & t \geq 1. \end{cases}$$

- c) ■ Demuestre que $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{3}{s} - \frac{6}{s}e^{-s}$ donde $f(t) = \begin{cases} 3 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ -3 & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$
- Demuestre que $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{6}{s(s^2 + 4s + 6)} \right\} = 1 - e^{-2t} \cos(\sqrt{2}t) - \sqrt{2} e^{-2t} \sin(\sqrt{2}t)$.
- Demuestre que $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{6}{s(s^2 + 4s + 6)} e^{-s} \right\} = \mathcal{U}(t-1) - e^{-2(t-1)} \cos \sqrt{2}(t-1) \cdot \mathcal{U}(t-1) - \sqrt{2} e^{-2(t-1)} \sin \sqrt{2}(t-1) \cdot \mathcal{U}(t-1)$.
- Resuelva el PVI

$$x'' + 4x' + 6x = f(t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$$

donde $f(t)$ es la función del inciso a).

- d) ■ Demuestre que $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s} - \frac{2}{s}e^{-s}$ donde $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ -1 & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$
- Demuestre que $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s+1)} \right\} = 1 - e^{-t}$.
- Demuestre que $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s+1)} e^{-s} \right\} = \mathcal{U}(t-1) - e^{-(t-1)} \mathcal{U}(t-1)$.
- Resuelva el PVI

$$y' + y = f(t), \quad y(0) = 0,$$

donde $f(t)$ es la función del inciso a).

- e) ■ Demuestre que $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{2}{s} - \frac{4}{s}e^{-s}$ donde $f(t) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ -2 & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$
- Demuestre que $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s+1)} e^{-s} \right\} = \mathcal{U}(t-1) - e^{-(t-1)} \mathcal{U}(t-1)$.

- Resuelva el PVI

$$y' + y = f(t), \quad y(0) = 0,$$

donde $f(t)$ es la función del inciso a).

5. Use únicamente argumentos de transformada de Laplace para resolver los siguientes problemas de masa-resorte. (Aceleración de la gravedad: 32 pies/s² o 10 m/s²)

- a) Una masa de un kilogramo estira un resorte 10/13 mts. Al inicio la masa se libera desde el reposo en la posición de equilibrio y el movimiento posterior toma lugar en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a 6 veces la velocidad instantánea. Una fuerza externa de $f(t) = 13 - 26\mathcal{U}(t - 5)$ actúa sobre la masa. Encuentre la ecuación del movimiento.
- b) Una masa que pesa 32 libras estira un resorte 32/5 pies y se sumerge en un medio que imparte una fuerza viscosa de 10 libras cuando la velocidad de la masa es 2 pies/s. Si en el instante inicial $t = 0$ la masa parte del reposo desde la posición de equilibrio y sobre este sistema masa-resorte actúa una fuerza externa $f(t)$ dada por

$$f(t) = \begin{cases} 5, & 0 \leq t < 3 \\ -5, & t \geq 3 \end{cases}$$

determine la solución del problema de valor inicial que describe el movimiento de la masa.

- c) Una masa que pesa 32 libras estira un resorte 32 pies. Si el peso se libera a partir del reposo y desde la posición de equilibrio, determine la ecuación del movimiento $x(t)$ si no hay fuerzas de amortiguamiento y sobre el sistema actúa una fuerza externa de

$$f(t) = \begin{cases} \cos 2t, & 0 \leq t < 2\pi \\ 0, & t \geq 2\pi. \end{cases}$$

- d) Una masa de 1/4 slug, cuando se une a un resorte, causa en éste un alargamiento de 8 pies y luego llega al punto de reposo en la posición de equilibrio. Empezando en $t = 0$, una fuerza externa de

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t}{4}, & 0 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$$

se aplica al sistema. Encuentre la ecuación del movimiento $x(t)$ si el medio circundante ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a la velocidad instantánea.

- e) Suponga que un peso de 32 libras estira un resorte 2 pies. Si el peso se libera a partir del reposo en la posición de equilibrio, determine la ecuación del movimiento $x(t)$ si una fuerza de

$$f(t) = \begin{cases} 20t, & 0 \leq t < 5 \\ 0, & t \geq 5 \end{cases}$$

actúa sobre el sistema. Desprecie cualquier fuerza de amortiguamiento.

- f) Resuelva el problema anterior si la fuerza aplicada en este caso es

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t < 2\pi \\ 0, & t \geq 2\pi. \end{cases}$$

- g) Una fuerza de 10 newtons alarga 10 metros un resorte. Una masa de 1 kilogramo se une al extremo del resorte y se libera desde la posición de equilibrio con una velocidad descendente de 1 m/s. Determine la ecuación del movimiento $x(t)$ si no hay fuerzas de amortiguamiento y sobre el sistema actúa una fuerza externa de

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \pi \\ 1, & \pi \leq t < 2\pi \\ 0, & t \geq 2\pi. \end{cases}$$

- h) Una masa que pesa 30 newtons estira un resorte 10 metros y se sumerge en un medio que imparte una fuerza viscosa de 4 N cuando la velocidad de la masa es 2 m/s. Si en el instante inicial $t = 0$ la masa parte del del reposo desde la posición de equilibrio y sobre este sistema masa-resorte actúa una fuerza externa $f(t)$ (en N) dada por

$$f(t) = \begin{cases} 72t, & 0 \leq t < 1 \\ 72, & t \geq 1 \end{cases}$$

determine la solución del problema de valor inicial que describe el movimiento de la masa.

6. Determine la solución de las siguientes ecuaciones integrales e integro-diferenciales

a)

$$y'(t) = \cos t + \int_0^t y(\tau) \cos(t - \tau) d\tau, \quad y(0) = 1.$$

b)

$$\int_0^t f(\tau) f(t - \tau) d\tau = 6t^3.$$

c)

$$y'(t) = 1 - \sin t - \int_0^t y(\tau) d\tau, \quad y(0) = 0.$$

d)

$$\frac{dy}{dt} + 6y(t) + 9 \int_0^t y(\tau) d\tau = 1, \quad y(0) = 0.$$

e)

$$y'(t) + 2y + \int_0^t y(\theta) d\theta = 1, \quad y(0) = 0.$$

f)

$$f(t) + \int_0^t f(y)(t - y) dy = t.$$

g)

$$t - 2f(t) = \int_0^t f(t - y)(e^y - e^{-y}) dy.$$

h)

$$f(t) + 2 \int_0^t f(\tau) \cos(t - \tau) d\tau = 4e^{-t} + \sin t.$$

i)

$$f(t) = 1 + t + \frac{8}{3} \int_0^t (t-y)^3 f(y) dy.$$

j)

$$f(t) = te^t + \int_0^t \tau f(t-\tau) d\tau.$$

k)

$$f(t) = 2t - 4 \int_0^t \sin \tau f(t-\tau) d\tau.$$

l)

$$f(t) + 3 \int_0^t f(y) \sin(t-y) dy = -3 \int_0^t \sin(2y) \sin(t-y) dy.$$

m)

$$f(t) - 2 \int_0^t f(y) \sin(2(t-y)) dt = t - \cos t \mathcal{U} \left(t - \frac{\pi}{2} \right).$$

n)

$$f'(t) + 13 \int_0^t f(x) dx - 6 f(t) = 13t + 13(t-2) \mathcal{U}(t-2), \quad f(0) = 0.$$

\tilde{n})

$$f'(t) + 18 \int_0^t f(x) dx - 6 f(t) = 18t + 18(t-3) \mathcal{U}(t-3), \quad f(0) = 0.$$

7. En una sola malla o circuito en serie LRC, la segunda ley de Kirchoff establece que la suma de las caídas de voltaje en un inductor, resistor y capacitor es igual al voltaje aplicado $E(t)$. Ahora bien, se sabe que las caídas de voltaje en un inductor, resistor y capacitor son, respectivamente,

$$L \frac{di}{dt}, \quad Ri(t), \quad \frac{1}{C} q(t),$$

donde $i(t)$ es la corriente y L , R y C son constantes. Como la carga $q(t) = \int_0^t i(\tau) d\tau$, se deduce que la corriente en el circuito LRC está gobernada por la **ecuación integrodiferencial**

$$L \frac{di}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = E(t).$$

Determine la corriente $i(t)$ en un circuito LRC de un sola malla cuando:

- a) $L = 0,1 \text{ h}$, $R = 3 \Omega$, $C = 0,05 \text{ f}$, $E(t) = 100[\mathcal{U}(t-1) - \mathcal{U}(t-2)]$, $i(0) = 0$.
b) $L = 0,005 \text{ h}$, $R = 1 \Omega$, $C = 0,02 \text{ f}$, $E(t) = 100[t - (t-1)\mathcal{U}(t-1)]$, $i(0) = 0$.