

Ejercicios sugeridos para preparar el tercer parcial.

1 Diferenciación.

1.1 Calcular la derivada utilizando la definición $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

1. $f(x) = 3x^2$

2. $f(x) = 5x^3$

3. $f(x) = \frac{-2}{x}$

4. $f(x) = \sqrt{x}$

5. $f(x) = 4$

6. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

1.2 Calcular la derivada

1. $f(x) = 4x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 8x + 4$

2. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

3. $f(x) = \frac{-2}{x^2}$

4. $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2}$

5. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

6. $f(x) = (x^3 + 2x - 1)(x^2 - 3)$

7. $f(x) = (x^2 + 3)(x^2 - 3)$

8. $f(x) = \frac{5x^2 + 8}{x^2 + 1}$

Solution is $f'(x) = \frac{-6x}{(x^2 + 1)^2}$

9. $f(x) = \frac{3x^3 + 2}{3x^3 - 4}$

Solution is $f'(x) = \frac{-54x^2}{(3x^3 - 4)^2}$

10. $f(x) = \frac{5x^2 - 7x - 6}{x^2 - 2x}$

1.3 Recta tangente a la curva.

1.3.1 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto indicado.

1. $y = x^2 + 1$ en el punto $(2, 5)$

2. $y = 4x^2 + 5x + 6$ en el punto $(1, 15)$

3. $y = \frac{x^2 + 4}{x^2 + 1}$ en el punto $x = 0$

4. $y = \frac{x^2 + 2}{x + 1}$ en el punto $x = 1$

5. $y = 3 + x - 5x^2 + x^4$ en el punto $(0, 3)$

6. $y = \frac{\sqrt{x}(2 - x^2)}{x}$ en el punto $x = 4$

7. Encuentre la pendiente a la curva $y = (x^2 - 7x - 8)^2$ en el punto $(8, 0)$.

8. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \sqrt[3]{(x^2 - 8)^2}$ en el punto $(3, 1)$

1.3.2 Encuentre todos los puntos sobre la curva donde la recta tangente es horizontal.

1. $y = \frac{5}{2}x^2 - x^3$

2. $y = \frac{x^5}{5} - x + 1$

1.4 Utilizar la Regla de la cadena para calcular la derivada de las siguientes funciones.

1. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

2. $f(x) = \sqrt{5x^3 + 2x^2 - 8x + 2}$

3. $f(x) = \sqrt[3]{(4x^5 - 2x^2)^2}$

4. $f(x) = \frac{x^2 + 5x - 4}{\sqrt{x^2 + 1}}$

5. $g(s) = \left(\frac{2s + 5}{s^2 + 1}\right)^4$

6. $f(t) = (t^2 - 4)^5 (3t + 5)^4$

7. $f(x) = \sqrt[3]{(x - 2)^2 (x + 2)}$

$$8. g(m) = \frac{10m^2}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

$$9. f(x) = 5^{(2x^2+x)}$$

$$10. f(x) = \sqrt{\frac{8x^2 - 3}{x^2 + 2}}$$

$$11. r(s) = \frac{2}{s^3} - \frac{9}{s^2}$$

$$12. f(x) = 7^{-x^2/4}$$

$$13. f(x) = x^2 e^{-x^2/4}$$

$$14. q(r) = \sqrt{12r - r^2}$$

$$15. s(t) = \sqrt[7]{t^{-2}}$$

$$16. g(x) = 8^{2x^2} + 16^{2x^3}$$

$$17. f(x) = \sqrt{\sqrt{x+2}}$$

1.5 Calcular la segunda derivada de las siguientes funciones.

$$1. f(x) = 6x^3 + 8x + 5x^{-3}$$

$$2. w(z) = 3z^{-6} - \frac{1}{z} + 6^3$$

$$3. f(t) = \ln(\sqrt{t^4 + 1})$$

$$4. g(t) = te^{-t^2}$$

$$5. r(s) = \frac{3}{s^3} - \frac{6}{s} + 2s + 4^2$$

$$6. f(x) = \frac{2}{5x^3} + \frac{1}{11x}$$

$$7. f(x) = \left(8 + \frac{4}{x}\right)^4$$

$$8. f(x) = (\sqrt{x} - 3)^{-4}$$

$$9. f(x) = e^{x^2/2}$$

$$10. f(x) = 7^{2x} + 3^{2x}$$

$$11. f(x) = \ln\left(\frac{4 + x^4}{x^9}\right)$$

$$12. f(x) = 6^{x^3} + 2^{x^3}$$

$$13. f(x) = \log_7 \left(\frac{7^x}{e^x + 1} \right)$$

$$14. P(q) = \frac{(q+2)(q+6)}{q^3}$$

1.6 Calcular la derivada de las siguientes funciones

$$1. f(x) = \ln(8x^4 + x^2)$$

$$2. f(x) = \ln \left(\frac{(x^2 + 1)(x^4 + x^2 + 1)}{x^4 + 1} \right)$$

$$3. f(x) = x^{16} \ln \sqrt{x^2 + 1}$$

$$4. g(z) = [\ln(z^4)]^2 + \left[\ln \left(\frac{1}{z^2} \right) \right]^6$$

$$5. f(x) = \ln(2x + \sqrt{4x^2 + 1})$$

$$6. f(x) = \ln \left(\frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1} \right)$$

$$7. f(x) = \log_2 \left(\frac{x^2 + 4}{x^4 + 1} \right)$$

$$8. f(x) = \frac{\ln(4x)}{\ln(2x)}$$

$$9. f(x) = \ln \sqrt{\frac{(3x+2)^2}{x^4+7}}$$

$$10. f(t) = \ln \left(\sqrt{5t+1} (t^3+4)^6 \right)$$

$$11. f(x) = \log_3 \left(\frac{3^{x^3}}{3^{2x^3} + 9^{x^3}} \right) \dots\dots\dots \text{Solution is } f'(x) = -3x^2$$

$$12. f(x) = \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x} \right)$$

$$13. f(x) = 7^{\sqrt{x}}$$

$$14. f(x) = 5^{9x}$$

$$15. f(x) = 2^{\sqrt{x^2+1}}$$

$$16. f(x) = \log_7(x^2 - 6x - 2)$$

$$17. f(x) = 3^x \ln(x^6 + 8)$$

$$18. f(x) = \log_2(3^{x^2})$$

$$19. f(x) = \log_2[(4x^2)(2^{x^2})]$$

$$20. f(x) = \log_2\left(\frac{x^2}{3\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$21. f(x) = x^4 e^{2x}$$

1.7 Costo marginal e ingreso marginal.

- Encuentre la función de ingreso marginal si la función de demanda es $p = \frac{25}{\ln(q+2)}$
- La función de costo total está dada por $c = 25 \ln(q+1) + 12$. Encuentre el costo marginal cuando $q = 6$
- La función en dólares del costo promedio de un fabricante, está dado por

$$\bar{c} = \frac{500}{\ln(q+20)}$$

Encuentre el costo marginal cuando $q = 50$.

- La oferta de q unidades de un producto al precio de p dólares por unidad está dado por $q(p) = 25 + 10 \ln(2p+1)$. Encuentre la tasa de cambio de la oferta con respecto al precio.
- En cada uno de los siguientes casos \bar{c} es el costo promedio de producir q unidades de un producto. Encuentre la función costo marginal y el costo marginal para los valores dados de q . Interprete su respuesta.

$$(a) \bar{c} = \frac{7000e^{q/700}}{q}; \quad q = 350, \quad q = 700$$

$$(b) \bar{c} = \frac{850}{q} + \frac{4000e^{(2q+6)/800}}{q}; \quad q = 97, \quad q = 197$$

- Si la ecuación de demanda del producto de un fabricante es $p = \frac{100}{q+5}$ donde p está en dólares, encuentre la función ingreso marginal y evalúela cuando $q = 45$.
- Si la ecuación del costo promedio de un fabricante es $\bar{c} = 0.0001q^2 - 0.02q + 5 + \frac{500}{q}$ encuentre la función de costo marginal. ¿Cuál es el costo marginal cuando se producen 50 unidades.
- El costo de producir q unidades de un producto está dado por $c(q) = 5500 + 12q + 0.2q^2$. Si el precio de p unidades está dado por $q = 900 - 1.5p$. utilice la regla de la cadena para encontrar la razón de cambio del costo con respecto al precio unitario cuando $p = 85$.

9. Si $r(q) = q(20 - 0.1q)$ es la función ingreso total, encuentre la función ingreso marginal.
10. Si $c(q) = 0.0001q^3 - 0.02q^2 + 3q + 6000$ es la función de costo total, encuentre el costo marginal cuando $q = 100$.
11. Si $p = 500 - 0.1q$ es una ecuación de demanda, encuentre la función ingreso marginal.
12. Un fabricante determinó que para su producto el costo promedio diario en cientos de dólares está dado por

$$\bar{c} = \frac{324}{\sqrt{q^2 + 35}} + \frac{5}{q} + \frac{19}{18}$$

- (a) Determine el costo marginal del fabricante cuando se producen 17 unidades por día.
- (b) El fabricante determina que si la producción y las ventas se incrementan en 18 unidades diarias, el ingreso crecería a \$275. ¿Debería realizar este aumento? ¿Por que?

1.8 Producto del ingreso marginal. (Opcional)

Definition 1 (*Texto guía pagina 519-520*) "Ahora se utilizará lo aprendido en el cálculo para desarrollar un concepto de importancia en el estudio de la economía. Suponga que un fabricante emplea m personas para producir un total de q unidades de un producto por día. Se puede pensar que q es una función de m . Si r es el ingreso total que el fabricante recibe al vender esas unidades, entonces r también puede considerarse una función de m . Así, se puede ver a $\frac{dr}{dm}$ como la razón de cambio del ingreso con respecto al número de empleados. La derivada $\frac{dr}{dm}$ se llama **producto del ingreso marginal**. Es aproximadamente igual al cambio en el ingreso que resulta cuando el fabricante emplea un trabajador adicional."

1. Un fabricante determina que m empleados producirán un total de q unidades de un producto por día, donde

$$q = \frac{10m^2}{\sqrt{m^2 + 19}}$$

Si la ecuación de demanda para el para el producto es $p = \frac{900}{q + 9}$, determine el producto del ingreso marginal cuando $m = 9$

2. Un empresario que emplea m trabajadores encuentra que producen

$$q = 2m(2m + 1)^{\frac{3}{2}}$$

unidades de producto diariamente. El ingreso total r (en dolares) esta dado por

$$r = \frac{50q}{\sqrt{1000 + 3q}}$$

- (a) ¿Cuál es el precio por unidad (al centavo mas cercano) cuando hay 12 trabajadores.?

- (b) Determine el ingreso marginal cuando hay 12 trabajadores.
- (c) Determine el producto del ingreso marginal cuando $m = 12$.
3. En cada uno de los siguientes casos, q es el número total de unidades producidas por día por m empleados de un fabricantes, y p es el precio de venta por unidad. En cada caso encuentre el producto del ingreso marginal para el valor dado m .
- (a) $q = 5m$, $p = -0.4q + 50$; $m = 6$
- (b) $q = \frac{200m - m^2}{20}$, $p = -0.1q + 70$; $m = 40$
- (c) $q = \frac{10m^2}{\sqrt{m^2 + 9}}$, $p = \frac{525}{q + 3}$; $m = 4$
- (d) $q = \frac{100m}{\sqrt{m^2 + 19}}$, $p = \frac{4500}{q + 10}$; $m = 9$