UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas y Estadística
Final de Cálculo III (ANEC) 202430
Fila A
Noviembre 27 de 2024

Nombre completo:______________________________Código:______________________________

1. **[8 pts]** Conteste falso (F) o verdadero (V) según el caso. Justifique claramente su respuesta.

   (a) [2 pts] $2y + (dy/dx)^2 = e^x$ es una ecuación diferencial lineal de segundo orden . . . . ( )

   (b) [2 pts] $\frac{dy}{dx} = e^y + \ln x$ es una ecuación de variables separables . . . . ( )

   (c) [2 pts] $y = x - 1 + 5e^{-x}$ es solución de la ecuación $\frac{dy}{dx} + y = x$ . . . . ( )

   (d) [2 pts] Si $k = 10$, entonces $(kxy^4 + y^3 - 2x)\,dx + (20x^2y^3 + 3xy^2)\,dy = 0$ es exacta . . . . ( )

---

2. **[12 pts]** Responda los incisos (a), (b) y (c) dados a continuación, los cuales corresponden a la siguiente ecuación diferencial.

$$\frac{dy}{dx} = 2xe^{-3y}\sqrt{1 + x^2}.$$

   (a) [2 pts] Verifique que la ED es de variables separables.

   (b) [6 pts] Determine la solución general de la ED.

   (c) [4 pts] Escriba la solución particular explícita de la ED que satisface $y(0) = 0$.

---

3. **[20 pts]** Ana y Juan están planeando celebrar su 25º aniversario de bodas con un viaje especial que costará 30 000 dólares dentro de 3 años. Sus hijos desean ayudar haciendo un depósito único de D dólares en una cuenta de ahorros que gana 5% de interés anual, capitalizado continuamente. Además, Ana y Juan planean hacer depósitos anuales de 600 dólares en la cuenta durante esos 3 años.

   (a) [5 pts] Plantee una ecuación diferencial con condiciones iniciales que modele el problema.

   (b) [15 pts] ¿Cuánto debe ser el depósito inicial D para que Ana y Juan viajen?

---

4. **[10 pts]** Considere la ED dada a continuación.

$$(3x^4 - 5x^6 + 12x^5y^2)\,dx + 4x^6y\,dy = 0.$$

   (a) [3 pts] Verifique que la ED es exacta.

   (b) [7 pts] Determine la solución general de la ecuación diferencial.

Tiempo máximo: 100 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude!

Solucion fila A

1) (a) F, La ED es de primer orden y no lineal.

(b) F, No es posible escribir la ED de la forma $\frac{dy}{dx} = f(x)\cdot g(y)$.

(c) Si $y = x-1+5e^{-x}$, entonces $\frac{dy}{dx} = 1-5e^{-x}$.

Por tanto,

$$\frac{dy}{dx} + y = \cancel{1} - \cancel{5e^{-x}} + x - \cancel{1} + \cancel{5e^{-x}}$$
$$= x \quad V$$

(d). Si $k=10$, tenemos la ED

$$(\underbrace{10xy^4+y^3-2x}_{M})dx + (\underbrace{20x^2y^3+3xy^2}_{N})dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 40xy^3+3y^2 \wedge \frac{\partial N}{\partial x} = 40xy^3+3y^2 \quad V$$

$\Rightarrow M_y = N_x$. La ED es exacta.

2) $$\frac{dy}{dx} = 2x\sqrt{1+x^2}\cdot e^{-3y}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int \frac{dy}{e^{-3y}}}_{I_1} = \underbrace{\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx}_{I_2}$$

- $I_1 = \int e^{3y}dy = \frac{1}{3}e^{3y} + C_1$
- $I_2 = \int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx \qquad u = 1+x^2, \; du = 2x\,dx$
$$= \int u^{1/2}du$$
$$= \frac{2}{3}u^{3/2} + C_2 = \frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2} + C_2$$

La solución general de la ED es

$$\frac{1}{3}e^{3y} = \frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2} + C.$$

La solución general explícita está dada por

$$y = \frac{1}{3}\ln[2(1+x^2)^{3/2} + C]$$

Para $y(0)=0$, tenemos $C=-1$. En este caso, la solución es

$$y = \frac{1}{3}\ln[2(1+x^2)^{3/2} - 1].$$

3) Sea $V(t)$ el valor en la cuenta de aho[rro] después de t años, entonces

$$\frac{dV}{dt} = 0{,}05V + 600, \quad V(3) = 30000 \wedge V(0) = D.$$

La solución general de la ED está dada [por]

$$V(t) = Ce^{0{,}05t} - 12000$$

Debido a que $V(3) = 30000$, tenemos que

$$C = 42000\,e^{-0{,}15}.$$

Por tanto,

$$V(t) = -12000 + 42000\,e^{-0{,}15+0{,}05t}$$

En consecuencia,

$$D = V(0)$$
$$= -12000 + 42000\,e^{-0{,}15} \approx 24149{,}73501$$

4) $$(\underbrace{3x^4-5x^6+12x^5y^2}_{M})dx + \underbrace{4x^6y}_{N}\,dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 24x^5y \wedge \frac{\partial N}{\partial x} = 24x^5y$$

La ED es exacta. Entonces existe $f(x,y)$ tal que

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^4-5x^6+12x^5y^2}_{(*_1)} \wedge \frac{\partial f}{\partial y} = 4x^6y$$

$$\Downarrow$$

$$f(x,y) = \int 4x^6y\,dy$$

$$\underbrace{f(x,y) = 2x^6y^2 + g(x)}_{(*_2)}$$

Por $(*_1)$ y $(*_2)$,

$$3x^4 - 5x^6 + \cancel{12x^5y^2} = \cancel{12x^5y^2} + g'(x)$$

$$\Rightarrow g(x) = \int(3x^4-5x^6)dx = \frac{3}{5}x^5 - \frac{5}{7}x^7 + C$$

La solución general de la ED es

$$2x^6y^2 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{5}{7}x^7 = C.$$

UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas y Estadística

Final de Cálculo III (ANEC) 202430

Fila B

Noviembre 27 de 2024

Nombre completo:____________________________Código:____________________________

1. **[8 pts]** Conteste falso (F) o verdadero (V) según el caso. Justifique claramente su respuesta.
   (a) [2 pts] $(dy/dx)^3 + 3y = \ln x$ es una ecuación diferencial lineal de tercer orden .... (   )
   (b) [2 pts] $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} + e^y$ es una ecuación de variables separables .... (   )
   (c) [2 pts] $y = -2 - 2x + e^x$ es solución de la ecuación $\frac{dy}{dx} - y = 2x$ .... (   )
   (d) [2 pts] Si $k = 4$, entonces $(4x^3y^2 + 3x^2y)\ dx + (kx^4y + x^3 - 2y)\ dy = 0$ no es exacta .... (   )

---

2. **[12 pts]** Responda los incisos (a), (b) y (c) dados a continuación, los cuales corresponden a la siguiente ecuación diferencial.
$$\frac{dy}{dx} = 3x^2e^{-4y}\sqrt{2 + x^3}.$$
   (a) [2 pts] Verifique que la ED es de variables separables.
   (b) [6 pts] Determine la solución general de la ED.
   (c) [4 pts] Escriba la solución particular explícita de la ED que satisface $y(-1) = 0$.

---

3. **[20 pts]** Carlos y Marta están planeando celebrar su 20º aniversario de bodas con una renovación de su casa, que costará 40 000 euros dentro de 4 años. Sus hijos desean ayudar haciendo un depósito único de E euros en una cuenta de ahorros que gana 4% de interés anual, capitalizado continuamente. Además, Carlos y Marta planean hacer depósitos anuales de 800 euros en la cuenta durante esos 4 años.
   (a) [5 pts] Plantee una ecuación diferencial con condiciones iniciales que modele el problema.
   (b) [15 pts] ¿Cuánto debe ser el depósito inicial E?

---

4. **[10 pts]** Considere la ED dada a continuación.
$$4xy^6\ dx + (12x^2y^5 - 5y^6 + 3y^4)\ dy = 0.$$
   (a) [3 pts] Verifique que la ED es exacta.
   (b) [7 pts] Determine la solución general de la ecuación diferencial.

Tiempo máximo: 100 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude!

Solución fila B

1) (a) F, la ED es de primer orden y no lineal.

(b) F, no es posible escribir la ED de la forma $\frac{dy}{dx} = f(x)\, g(y)$.

(c) Si $y = -2-2x+e^{x}$, entonces $\frac{dy}{dx} = -2+e^{x}$. Por tanto,

$$\frac{dy}{dx} - y = \cancel{-2} + \cancel{e^{x}} + \cancel{2} + 2x - \cancel{e^{x}}$$

$$= 2x \quad \text{(V)}$$

(d) Si $k=4$, tenemos la ED

$$\underbrace{(4x^3y^2+3x^2y)}_{M}\,dx + \underbrace{(4x^4y+x^3-2y)}_{N}\,dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 8x^3y+3x^2 \quad \wedge \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 16x^3y+3x^2 \quad \text{(V)}$$

$\Rightarrow M_y \neq N_x$. La ED no es exacta.

2) $$\frac{dy}{dx} = 3x^2 e^{-4y}\sqrt{2+x^3}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int \frac{dy}{e^{-4y}}}_{I_1} = \underbrace{\int 3x^2\sqrt{2+x^3}\,dx}_{I_2}$$

- $I_1 = \int e^{4y}\,dy = \frac{1}{4}e^{4y} + C_1$
- $I_2 = \int 3x^2\sqrt{2+x^3}\,dx$ $\qquad u = 2+x^3$, $du = 3x^2\,dx$

$$= \int u^{1/2}\,du$$

$$= \frac{2}{3}u^{3/2} + C_2 = \frac{2}{3}(2+x^3)^{3/2} + C_2$$

La solución general de la ED es

$$\frac{1}{4}e^{4y} = \frac{2}{3}(2+x^3)^{3/2} + C$$

Para $y(-1)=0$, tenemos $C = -5/12$. En este caso, la solución explícita es

$$y = \frac{1}{4}\ln\left[\frac{8}{3}(2+x^3)^{3/2} - \frac{5}{3}\right]$$

3) Sea $V(t)$ el valor en la cuenta de ahorro después de t años, entonces

$$\frac{dV}{dt} = 0{,}04\,V + 800, \quad V(4) = 40000 \ \wedge\ V(0) =$$

La solución general de la ED está dada po

$$V(t) = -20000 + Ce^{0{,}04t}$$

Debido a que $V(4) = 40000$, tenemos que

$$C = 60000\,e^{-0{,}16}$$

Por tanto,

$$V(t) = -20000 + 60000\,e^{-0{,}16+0{,}04t}$$

En consecuencia,

$$E = V(0)$$

$$= -20000 + 60000\,e^{-0{,}16} \approx 31128{,}627$$

4) $$\underbrace{4xy^6}_{M}\,dx + \underbrace{(12x^2y^5-5y^6+3y^4)}_{N}\,dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 24xy^5 \quad \wedge \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 24xy^5$$

La ED es exacta. Entonces existe $f(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4xy^6 \quad \wedge \quad \frac{\partial f}{\partial y} \overset{(*_2)}{=} 12x^2y^5 - 5y^6 + 3y^4$$

$$\Downarrow$$

$$f(x,y) = \int 4xy^6\,dx + g(y)$$

$$f(x,y) = 2x^2y^6 + g(y) \quad (*_1)$$

Por $(*_1)$ y $(*_2)$,

$$\cancel{12x^2y^5} - 5y^6 + 3y^4 = \cancel{12x^2y^5} + g'(y)$$

$$\Rightarrow g(y) = \int(-5y^6+3y^4)\,dy = -\frac{5}{7}y^7 + \frac{3}{5}y^5 + C$$

La solución general de la ED es

$$2x^2y^6 - \frac{5}{7}y^7 + \frac{3}{5}y^5 = C.$$