UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas y Estadística
Final de Cálculo III (ANEC) 202410
Fila A
Mayo 27 de 2024

Nombre completo:______________________ NRC[**3 pts**]:______________________

1. [**7 pts**] Muestre que la función
$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-6x} - \tfrac{1}{18}x^2 + \tfrac{1}{27}x$$
es solución de la ecuación diferencial
$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 18y = x^2 - x,$$
donde C_1 y C_2 son constantes reales.

---

2. [**10 pts**] Considere la ecuación diferencial
$$\frac{dy}{dx} = 2xe^{-3y}(x^2-1)^9.$$
Verifique que la ED es de *variables separables* y posteriormente encuentre su solución general *explícita*.

---

3. [**15 pts**] Ana deposita \$20 000 en una cuenta en la que se acumula interés a una tasa de 4% anual, capitalizado continuamente. Ella planea retirar \$4 000 por año.
   (a) [10 pts] Plantee y resuelva una ecuación diferencial para determinar el saldo $S(t)$ de la cuenta t años después del depósito inicial.
   (b) [5 pts] ¿Cuánto tardará la cuenta en agotarse?

---

4. [**10 pts**] Determine la solución general de la ecuación diferencial
$$(5x^4 - 9x^2y^2 + 5y^4)dx + \left(20xy^3 - 6x^3y\right)dy = 0.$$

---

5. [**5 pts**] Determine el valor de la constante k tal que la ecuación diferencial
$$\left(2xy + \tfrac{1}{6}y^3e^x + \tfrac{1}{y}\right)dx + \left(-ky^2e^x + x^2 - \tfrac{x}{y^2}\right)dy = 0$$
sea exacta.

Tiempo máximo: 100 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude!

Solución fila A

1) $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-6x} - \frac{1}{18}x^2 + \frac{1}{27}x$

• $y' = 3C_1 e^{3x} - 6C_2 e^{-6x} - \frac{1}{9}x + \frac{1}{27}$

• $y'' = 9C_1 e^{3x} + 36C_2 e^{-6x} - \frac{1}{9}$

luego,

$y'' + 3y' - 18y$

$= \cancel{9C_1 e^{3x}} + \cancel{36C_2 e^{-6x}} - \cancel{\frac{1}{9}}$

$+ \cancel{9C_1 e^{3x}} - \cancel{18C_2 e^{-6x}} - \frac{1}{3}x + \cancel{\frac{1}{9}}$

$- \cancel{18C_1 e^{3x}} - \cancel{18C_2 e^{-6x}} + x^2 - \frac{2}{3}x$

$= x^2 - x$

2) $\frac{dy}{dx} = 2x e^{-3y}(x^2-1)^9$

$\Rightarrow \int e^{3y}\,dy = \int 2x(x^2-1)^9\,dx$

$\frac{1}{3}e^{3y} = \frac{1}{10}(x^2-1)^{10} + C$

Solución explícita:

$\Rightarrow y = \frac{1}{3}\ln\left[\frac{3}{10}(x^2-1)^{10} + C\right]$

3) Sea $S(t)$ el saldo en la cuenta de Ana después de t años, entonces

$\frac{dS}{dt} = 0{,}04S - 4000$; $S(0) = 20\,000$ $(*_1)$

La solución de $(*_1)$ es

$S(t) = 100\,000 - 80\,000\,e^{0{,}04t}$ $(*_2)$

La cuenta se agota cuando

$S(t) = 0$ $(*_3)$

Por $(*_2)$ y $(*_3)$, $t = \frac{1}{0{,}04}\ln\frac{100\,000}{80\,000} \approx 5{,}6$

4) $\underbrace{(5x^4 - 9x^2y^2 + 5y^4)}_{M}dx + \underbrace{(20xy^3 - 6x^3y)}_{N}dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = -18x^2y + 20y^3 \ \wedge\ \frac{\partial N}{\partial x} = 20y^3 - 18x^2y$

Dado que $M_y = N_x$, entonces la ED es exacta. Existe $f(x,y)$ tal que

$\frac{\partial f}{\partial x} = 5x^4 - 9x^2y^2 + 5y^4$ $(*_1)$ $\wedge$ $\frac{\partial f}{\partial y} = 20xy^3 - 6x^3y$

$\Downarrow$ integrando con respecto a y

$(*_2)$ $f(x,y) = 5xy^4 - 3x^3y^2 + g(x)$

Por $(*_1)$ y $(*_2)$,

$5x^4 - 9x^2y^2 + 5y^4 = \frac{\partial f}{\partial x}$

$= 5y^4 - 9x^2y^2 + g'(x)$

$\Rightarrow g'(x) = 5x^4 \Rightarrow g(x) = x^5 + C.$

luego,

$f(x,y) = 5xy^4 - 3x^3y^2 + x^5 + C$

La solución general de la ED es

$5xy^4 - 3x^3y^2 + x^5 = C.$

5) $\underbrace{\left(2xy + \frac{1}{6}y^3e^x + \frac{1}{y}\right)}_{M}dx + \underbrace{\left(-ky^2e^x + x^2 - \frac{x}{y^2}\right)}_{N}dy =$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x + \frac{1}{2}y^2e^x - \frac{1}{y^2}$ $(*_1)$

$\frac{\partial N}{\partial x} = -ky^2e^x + 2x - \frac{1}{y^2}$ $(*_2)$

la ED es exacta siempre que

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. $(*_3)$

Por $(*_1)$, $(*_2)$ y $(*_3)$:

$k = -1/2$

Departamento de Matemáticas y Estadística
Final de Cálculo III (ANEC) 202410
Fila B
Mayo 27 de 2024

Nombre completo:________________________ NRC[**3 pts**]:________________________

1. [**7 pts**] Muestre que la función
$$y = C_1e^{6x} + C_2e^{-2x} - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}$$
es solución de la ecuación diferencial
$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} - 12y = 6x^2 - 2x,$$
donde C_1 y C_2 son constantes reales.

---

2. [**10 pts**] Considere la ecuación diferencial
$$\frac{dy}{dx} = 3x^2e^{-4y}(x^3+1)^8.$$
Verifique que la ED es de *variables separables* y posteriormente encuentre su solución general *explícita*.

---

3. [**15 pts**] Ángel deposita \$40 000 en una cuenta en la que se acumula interés a una tasa de 5% anual, capitalizado continuamente. Él planea retirar \$5 000 por año.
   (a) [10 pts] Plantee y resuelva una ecuación diferencial para determinar el saldo $S(t)$ de la cuenta t años después del depósito inicial.
   (b) [5 pts] ¿Cuánto tardará la cuenta en agotarse?

---

4. [**10 pts**] Determine la solución general de la ecuación diferencial
$$(20x^3y - 6xy^3)dx + (5x^4 - 9x^2y^2 + 5y^4)dy = 0.$$

---

5. [**5 pts**] Determine el valor de la constante k tal que la ecuación diferencial
$$\left(-kx^3e^y + y^2 - \tfrac{y}{x^2}\right)dx + \left(2xy + \tfrac{1}{12}x^4e^y + \tfrac{1}{x}\right)dy = 0$$
sea exacta.

Tiempo máximo: 100 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude!

Solución fila B

1) $y = C_1 e^{6x} + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$

• $y' = 6C_1 e^{6x} - 2C_2 e^{-2x} - x + \frac{1}{2}$

• $y'' = 36C_1 e^{6x} + 4C_2 e^{-2x} - 1$

Luego,

$y'' - 4y' - 12y$

$= \cancel{36C_1 e^{6x}} + \cancel{4C_2 e^{-2x}} \cancel{-1}$

$\cancel{-24C_1 e^{6x}} + \cancel{8C_2 e^{-2x}} + 4x \cancel{-2}$

$\cancel{-12C_1 e^{6x}} \cancel{-12C_2 e^{-2x}} + 6x^2 - 6x \cancel{+3}$

$= 6x^2 - 2x$

2) $\frac{dy}{dx} = 3x^2 e^{-4y}(x^3+1)^8$

$\Rightarrow \int e^{4y}\,dy = \int 3x^2(x^3+1)^8\,dx$

$\frac{1}{4}e^{4y} = \frac{1}{9}(x^3+1)^9 + C$

Solución explícita:

$y = \frac{1}{4}\ln\left[\frac{4}{9}(x^3+1)^9 + C\right]$

3) Sea $S(t)$ el saldo en la cuenta de Ángel después de t años, entonces

$\frac{dS}{dt} = 0{,}05S - 5000$; $S(0) = 40000$ $(*_1)$

La solución de $(*_1)$ es

$S(t) = 100\,000 - 60000\,e^{0{,}05t}$ $(*_2)$

La cuenta se agota cuando

$S(t) = 0$ $(*_3)$

Por $(*_2)$ y $(*_3)$,

$t = \frac{1}{0{,}05}\ln\frac{100000}{60\,000} \approx 10{,}21$

4) $\underbrace{(20x^3y - 6xy^3)}_{M}dx + \underbrace{(5x^4 - 9x^2y^2 + 5y^4)}_{N}dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 20x^3 - 18xy^2 \;\wedge\; \frac{\partial N}{\partial x} = 20x^3 - 18xy^2$

Dado que $M_y = N_x$, entonces la ED es exacta. Existe $f(x,y)$ tal que

$\frac{\partial f}{\partial x} = 20x^3y - 6xy^3 \;\wedge\; \overset{(*_1)}{\frac{\partial f}{\partial y}} = 5x^4 - 9x^2y^2 + 5y^4$

$\Downarrow$ integrando con respecto a x

$f(x,y) = 5x^4y - 3x^2y^3 + g(y)$ $(*_2)$

Por $(*_1)$ y $(*_2)$,

$5x^4 - 9x^2y^2 + 5y^4 = \frac{\partial f}{\partial y}$

$= 5x^4 - 9x^2y^2 + g'(y)$

$\Rightarrow g'(y) = 5y^4 + C \Rightarrow g(y) = y^5 + C$

Luego,

$f(x,y) = 5x^4y - 3x^2y^3 + y^5 + C$.

La solución general de la ED es

$5x^4y - 3x^2y^3 + y^5 = C.$

5) $\underbrace{\left(-kx^3e^y + y^2 - \frac{y}{x^2}\right)}_{M}dx + \underbrace{\left(2xy + \frac{1}{12}x^4e^y + \frac{1}{x}\right)}_{N}dy$

$\frac{\partial M}{\partial y} = -kx^3e^y + 2y - \frac{1}{x^2}$ $(*_1)$

$\frac{\partial N}{\partial x} = 2y + \frac{1}{3}x^3e^y - \frac{1}{x^2}$ $(*_2)$

La ED es exacta siempre que

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ $(*_3)$

Por $(*_1)$, $(*_2)$ y $(*_3)$:

$k = -1/3$