UNIVERSIDAD DEL NORTE
DEPARTAMENTO MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

30 Octubre 2024
Docente: Gustavo Vergara
Examen: Tercer Parcial Fila A

El siguiente es el tercer parcial de la asignatura de cálculo 3 ANEC. El examen tendrá una duración de 120 minutos. Justifique adecuadamente de acuerdo a lo visto en clases. Todos los puntos valen lo mismo. **Cualquier intento de copia será motivo de anulación. El préstamo de útiles o calculadoras está prohibido.**

Name:____

1. Resuelva la integral:
$$\int_0^1 \int_0^3 (3x + 2y) dy dx.$$

2. Considere la siguiente integral:
$$\int_0^4 \int_{x^2/16}^{\sqrt{x}/2} (xy) dy dx.$$
   (a) Trace la región de integración.
   (b) Invierta el orden de integración a $dxdy$.
   (c) Resuelva la integral del inciso anterior.

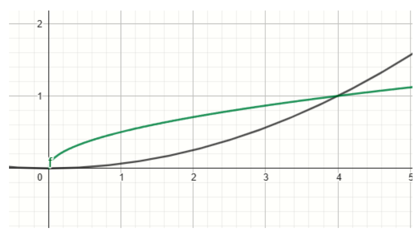
3. Sea R la región acotada por las funciones $y = x^3$ y $y = x^2$.
   (a) Halle el área de la región R.
   (b) Usando $f(x, y) = x^3 + y^3$, calcule el valor promedio de f en R.

Universidad Del Norte
Departamento Matemáticas y Estadística

1 Respuestas

1. Resolvamos la primera integral:
$$\int (3x+2y)dy = 3xy + y^2$$
Reemplazando en los límites tenemos: $3x(3) + (3)^2 - 3x(0) - (0)^2 = 9x + 9$. Luego:
$$\int_0^1 (9x+9)dx = 9\frac{(1)^2}{2} + 9(1) = \frac{27}{2}.$$

2. (a) La región de integración está dada por:



(b) Despejando obtenemos $x = 4y^2$, $x = 4\sqrt{y}$ donde se ve que primero aparece $4y^2$ y que el límite en y es de 0 a 1. Entonces la integral queda:
$$\int_0^1 \int_{4y^2}^{4\sqrt{y}} (xy)dxdy.$$

(c) Al resolver la integral tenemos:
$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_{4y^2}^{4\sqrt{y}} (xy)dxdy &= \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2}y\right]_{4y^2}^{4\sqrt{y}} dy \\ &= \int_0^1 \frac{y}{2}(16y - 16y^4)dy \\ &= \int_0^1 (8y^2 - 8y^5)dy \\ &= \left[\frac{8y^3}{3} - \frac{8y^6}{6}\right]_0^1 \\ &= \frac{4}{3}\end{aligned}$$

3. (a) La región R es aquella contenida entre las gráficas $y = x^2$ y $y = x^3$ en el intervalo $(0,1)$
$$A = \int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} dydx = \int_0^1 (x^2 - x^3)dx = \frac{1}{12}$$

(b) Ahora, el valor promedio está dado por:
$$VP = \frac{\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} (x^3+y^3)dydx}{\frac{4}{3}}.$$

La integral de arriba es:

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_{x^3}^{x^2}(x^3+y^3)dydx &= \int_0^1\left[x^3y+\frac{y^4}{4}\right]_{x^3}^{x^2}dx\\ &= \int_0^1\left(x^5-x^6+\frac{x^8-x^{12}}{4}\right)dx\\ &= \left[\frac{x^6}{6}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{36}-\frac{x^{13}}{52}\right]_0^1\\ &= \frac{53}{1638}.\end{aligned}$$

Por lo que

$$VP=\frac{\frac{53}{1638}}{\frac{1}{12}}\approx 0.39$$

The End.

UNIVERSIDAD DEL NORTE
DEPARTAMENTO MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

30 Octubre 2024
Docente: Gustavo Vergara
Examen: Tercer Parcial Fila B

El siguiente es el tercer parcial de la asignatura de cálculo 3 ANEC. El examen tendrá una duración de 120 minutos. Justifique adecuadamente de acuerdo a lo visto en clases. Todos los puntos valen lo mismo. **Cualquier intento de copia será motivo de anulación. El préstamo de útiles o calculadoras está prohibido.**

Name:____

1. Resuelva la integral:
$$\int_0^1 \int_0^3 (3x+2y)dydx.$$
2. Considere la siguiente integral:
$$\int_0^9 \int_{x^2/81}^{\sqrt{x}/3} (xy)dydx.$$
   (a) Trace la región de integración.
   (b) Invierta el orden de integración a $dxdy$.
   (c) Resuelva la integral del inciso anterior.
3. Sea R la región acotada por las funciones $y = x^3$ y $y = x^2$.
   (a) Halle el área de la región R.
   (b) Usando $f(x, y) = x^2 + y^2$, calcule el valor promedio de f en R.

Universidad Del Norte
Departamento Matemáticas y Estadística

1 Respuestas

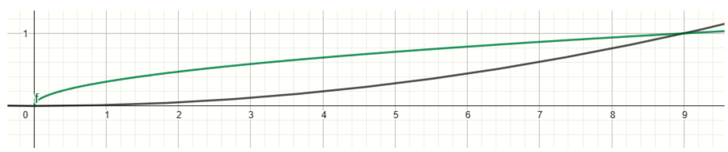
1. Resolvamos la primera integral:

$$\int (3x+2y)dy = 3xy + y^2$$

Reemplazando en los límites tenemos: $3x(3) + (3)^2 - 3x(0) - (0)^2 = 9x + 9$. Luego:

$$\int_0^1 (9x+9)dx = 9\frac{(1)^2}{2} + 9(1) = \frac{27}{2}.$$

2. (a) La región de integración está dada por:



(b) Despejando obtenemos $x = 9y^2$, $x = 9\sqrt{y}$ donde se ve que primero aparece $9y^2$ y que el límite en y es de 0 a 1. Entonces la integral queda:

$$\int_0^1 \int_{9y^2}^{9\sqrt{y}} (xy)dxdy.$$

(c) Al resolver la integral tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{9y^2}^{9\sqrt{y}} (xy)dxdy &= \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2}y\right]_{9y^2}^{9\sqrt{y}} dy \\
&= \int_0^1 \frac{y}{2}(81y - 81y^4)dy \\
&= \int_0^1 \left(\frac{81}{2}y^2 - \frac{81}{2}y^5\right) dy \\
&= \left[\frac{81y^3}{6} - \frac{81y^6}{12}\right]_0^1 \\
&= \frac{27}{4}
\end{aligned}$$

3. (a) La región R es aquella contenida entre las gráficas $y = x^2$ y $y = x^3$ en el intervalo $(0, 1)$

$$A = \int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} dydx = \int_0^1 (x^2 - x^3)dx = \frac{1}{12}$$

(b) Ahora, el valor promedio está dado por:

$$VP = \frac{\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} (x^2+y^2)dydx}{\frac{4}{3}}.$$

La integral de arriba es:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} (x^2 + y^2) dy dx &= \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{x^3}^{x^2} dx \\
&= \int_0^1 \left(x^4 - x^5 + \frac{x^6 - x^9}{3} \right) dx \\
&= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{21} - \frac{x^{10}}{30} \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{21}.
\end{aligned}$$

Por lo que

$$VP = \frac{\frac{1}{21}}{\frac{1}{12}} \approx 0.57$$

The End.