Alumno:____ Código:________________Fila: AAAA

`Instrucciones:` REALICE SÓLO CUATRO PUNTOS.

EL TERCER EJERCICIO ES DE CARÁCTER OBLIGATORIO.

`La duración del examen es 100 Minutos. Es prohibido el uso o poseción de dispositivos electrónicos. Cualquier fraude o intento de fraude académico será causal de anulación. Es prohibido el préstamo de objetos durante el examen.`

Ejercicio 1. (1.0 ptos):

Resuelva la integral doble

$$\int_0^2 \int_{-2}^3 \left(4 + xy^3\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Ejercicio 2.(1.0 ptos):

Dibuje la región de integración para la integral dada y plantee una integral equivalente con el orden de integración invertido.

$$\int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Ejercicio 3.(2.0 ptos):

Tenga en cuenta los pasos de abajo para determinar el valor de la integral

$$\int_0^1 \int_y^1 \sqrt{1+x^2}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

a) (0.5 pts) Trace la región de integración.

b) (0.5 pts) Invierta el orden de integración.

c) (1.0 pts) Evalúe la integral del inciso b).

Ejercicio 4.(1.0 ptos):

Emplee una integral doble para determinar el área de la región R limitada por las curvas $y = 2 - x^2$ y $y = x$.

Ejercicio 5.(1.0 pt):

En cierta fábrica, la producción Q está relacionada con las entradas x y y por la expresión

$$Q(x,y) = 2x^3 + 3x^2y + y^3.$$

Si $0 \leq x \leq 5$ y $0 \leq y \leq 7$, ¿cuál es el promedio de producción de la fábrica?

Solución

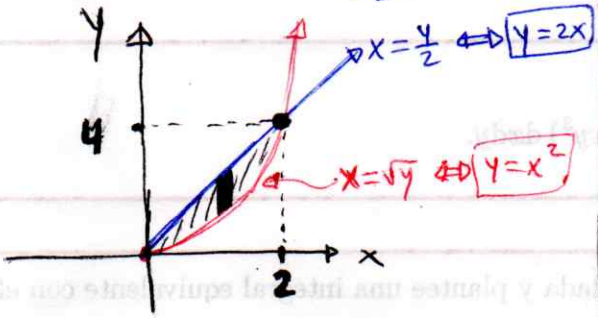
1) $$\int_0^2\int_{-2}^3 (4+xy^3)\,dx\,dy = \int_0^2 \left(4x+\frac{x^2y^3}{2}\right)_{-2}^3 dy$$

$$=\int_0^2 \left[12+\frac{9}{2}y^3+8-2y^3\right]dy$$

$$=\int_0^2\left[20+\frac{5}{2}y^3\right]dy = \left(20y+\frac{5}{8}y^4\right)_0^2$$

$$=40+10=50.$$

2) $$\int_0^4\int_{y/2}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\,dy \Rightarrow R=\begin{cases}0\le y\le 4\\ \frac{y}{2}\le x\le\sqrt{y}\end{cases}$$



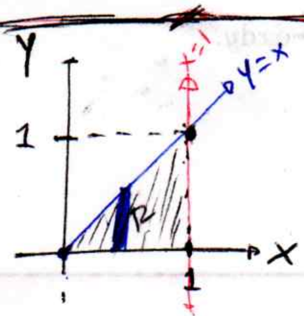
luego: $$R=\begin{cases}0\le x\le 2\\ x^2\le y\le 2x\end{cases}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\int_0^4\int_{y/2}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2\int_{x^2}^{2x} f(x,y)\,dy\,dx}$$

3) $$\int_0^1\int_y^1 \sqrt{1+x^2}\,dx\,dy$$

a) $$R=\begin{cases}0\le y\le 1\\ y\le x\le 1\end{cases} \Rightarrow$$



b) $$\boxed{\int_0^1\int_0^y \sqrt{1+x^2}\,dy\,dx}$$

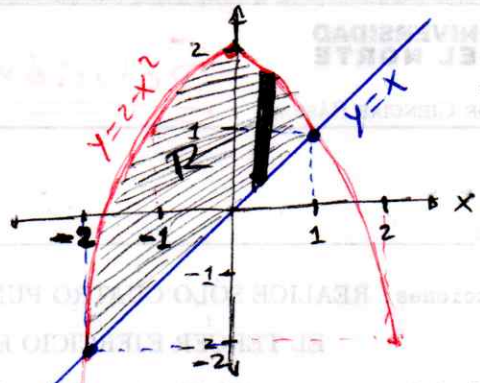
c) $$\int_0^1\int_0^y \sqrt{1+x^2}\,dy\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\cdot x\,dx$$

$$=\int_1^2 \sqrt{u}\cdot\frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{3/2}}{3/2}\Big|_1^2$$

$$=\frac{1}{3}\left(2^{3/2}-1^{3/2}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)\approx 0{,}609.$$

4) $$R=\begin{cases}y=2-x^2\\ y=x\end{cases}$$



$$R=\begin{cases}-2\le x\le 1\\ x\le y\le 2-x^2\end{cases}$$

$$a(R)=\int_{-2}^1\int_x^{2-x^2} 1\cdot dy\,dx = \int_{-2}^1 \left(2-x^2-x\right)dx$$

$$=\left(2x-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right)_{-2}^1 = \left(2-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)-\left(-4+\frac{8}{3}-2\right)$$

$$=2-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+4-\frac{8}{3}+2$$

$$=8-\frac{9}{3}-\frac{1}{2}$$

$$=8-3-\frac{1}{2}$$

$$=5-\frac{1}{2}$$

$$\boxed{a(R)=\frac{9}{2}\text{ unidades cuadradas}}$$

5) $$VP=\frac{1}{a(R)}\iint_R f(x,y)\,dA$$

$$VP=\frac{1}{35}\int_0^5\int_0^7 \left(2x^3+3x^2y+y^3\right)dy\,dx$$

$$=\frac{1}{35}\int_0^5\left(2x^3y+3x^2\frac{y^2}{2}+\frac{y^4}{4}\right)_0^7 dx$$

$$=\frac{1}{35}\int_0^5\left(14x^3+\frac{147}{2}x^2+\frac{2401}{4}\right)dx$$

$$=\frac{1}{35}\left(\frac{14}{4}x^4+\frac{147}{6}x^3+\frac{2401}{4}x\right)_0^5$$

$$=\frac{1}{35}\left(\frac{14}{4}(625)+\frac{147}{6}(125)+\frac{2401}{4}(5)\right)$$

$$=\frac{1}{35}\left(\frac{33005}{4}\right)$$

$$=\boxed{\frac{943}{4}}$$

$$\approx\boxed{235{,}75}$$