Departamento de Matemáticas y Estadística
Tercer parcial de Cálculo III ANEC 202410
Fila A
Abril 30 de 2024

Nombre completo:________________________________Código:________________________________

REALICE SÓLO CUATRO PUNTOS
EL TERCER EJERCICIO ES DE CARÁCTER OBLIGATORIO

1. **[10 pts]** Resuelva la integral doble

$$\int_{-2}^{2}\int_{0}^{1}\left(4x^3y+1\right)dydx.$$

---

2. **[10 pts]** Plantee una integral equivalente con el orden de integración invertido.

$$\int_{0}^{4}\int_{x/4}^{\sqrt{x}/2} f(x,y)dydx.$$

---

3. **[20 pts]** Tenga en cuenta los pasos de abajo para determinar el valor de la integral

$$\int_{0}^{1}\int_{y^2}^{1} 4ye^{x^2}dxdy.$$

   (a) [5 pts] Trace la región de integración.
   (b) [5 pts] Invierta el orden de integración.
   (c) [10 pts] Evalúe la integral del inciso anterior.

---

4. **[10 pts]** Emplee una integral doble para determinar el área de la región R limitada por $y=\frac{1}{2}x^2$ y $y=2x$.

---

5. **[10 pts]** Encuentre el valor promedio de la función

$$f(x,y)=x+1$$

sobre la región R limitada por $y=8-x^2$ y $y=x^2$.

Tiempo máximo: 100 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude.

fila A.

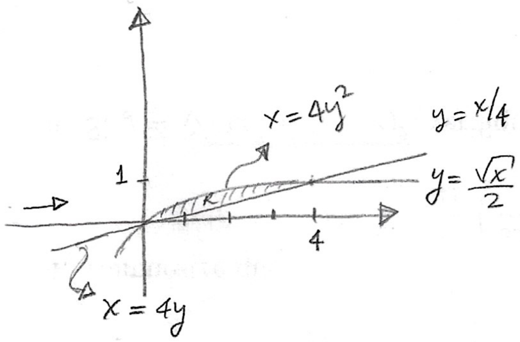
1) $\int_{-2}^{2}\int_{0}^{1} (4x^3y+1)\,dy\,dx$

$= \int_{-2}^{2} (2x^3y^2+y)\Big|_0^1 dx = \int_{-2}^{2} (2x^3+1)\,dx$

$= \left(\frac{1}{2}x^4+x\right)\Big|_{-2}^{2} = (8+2)-(8-2) = 4$

2) $\int_{0}^{4}\int_{x/4}^{\sqrt{x}/2} f(x,y)\,dy\,dx$

$R \overset{stv}{=} \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 4 \wedge \frac{x}{4}\le y\le \frac{\sqrt{x}}{2}\}$

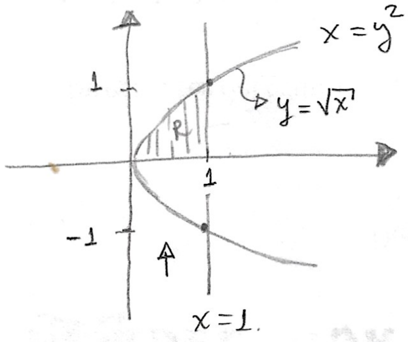


$R \overset{sth}{=} \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le y\le 1 \wedge 4y^2\le x\le 4y\}$

$\Rightarrow \int_{0}^{4}\int_{x/4}^{\sqrt{x}/2} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{0}^{1}\int_{4y^2}^{4y} f(x,y)\,dx\,dy.$

3) Región de integración

$R \overset{sth}{=} \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le y\le 1 \wedge y^2\le x\le 1\}$



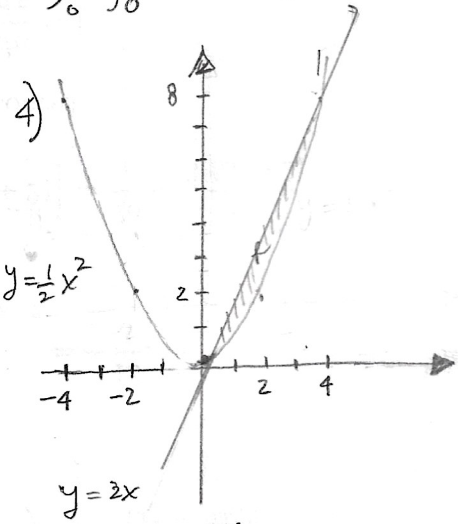
$R \overset{stv}{=} \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1 \wedge 0\le y\le \sqrt{x}\}$

luego,

$\int_{0}^{1}\int_{y^2}^{1} 4y\,e^{x^2}\,dx\,dy$

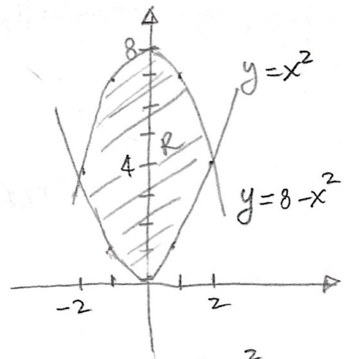
$= \int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{x}} 4y\,e^{x^2}\,dy\,dx = e-1 \approx 1,718$

4)



$a(R) = \int_{0}^{4}\int_{\frac{1}{2}x^2}^{2x} dy\,dx = 16/3$

5)



- $a(R) = \int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{8-x^2} dy\,dx = 64/3$

- $\iint_R f(x,y) = \int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{8-x^2} (x+1)\,dy\,dx = 64/3$

$\Rightarrow \bar{f}_R = \frac{1}{64/3}\cdot\frac{64}{3} = 1.$

Departamento de Matemáticas y Estadística
Tercer parcial de Cálculo III ANEC 202410
Fila B
Abril 30 de 2024

Nombre completo:____________________ Código:____________________

REALICE SÓLO CUATRO PUNTOS
EL TERCER EJERCICIO ES DE CARÁCTER OBLIGATORIO

1. [**10 pts**] Resuelva la integral doble

$$\int_0^2 \int_{-1}^3 \left(4 + xy^3\right) dxdy.$$

---

2. [**10 pts**] Invierta el orden de integración de la integral dada a continuación escribiéndola como la suma de dos integrales dobles.

$$\int_0^1 \int_{y^2}^{2-y} f(x, y) dxdy.$$

---

3. [**20 pts**] Tenga en cuenta los pasos de abajo para determinar el valor de la integral

$$\int_0^1 \int_y^1 \sqrt{1 + x^2} dxdy.$$

   (a) [5 pts] Trace la región de integración.
   (b) [5 pts] Invierta el orden de integración.
   (c) [10 pts] Evalúe la integral del inciso anterior.

---

4. [**10 pts**] Emplee una integral doble para determinar el área de la región R limitada por $y = 2 - x^2$ y $y = x$.

---

5. [**10 pts**] Encuentre el valor promedio de la función

$$f(x, y) = e^{x^2}$$

sobre la región triangular R con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(1, 1)$.

Tiempo máximo: 100 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude.

fila B

1) $$\int_0^2\int_{-1}^3 (4+xy^3)\,dx\,dy$$

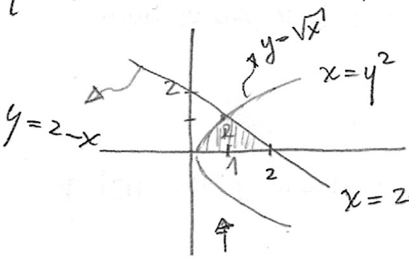
$$= \int_0^2 \left(4x+\tfrac{1}{2}x^2y^3\right)\Big|_{-1}^3 dy$$

$$= \int_0^2 \left(12+\tfrac{9}{2}y^3+4-\tfrac{1}{2}y^3\right) dy$$

$$= \int_0^2 (16+4y^3)\,dy = (16y+y^4)\Big|_0^2 = 48$$

2) $$\int_0^1\int_{y^2}^{2-y} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$R \overset{\text{sth}}{=} \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le y\le 1 \wedge y^2\le x\le 2-y\}$$



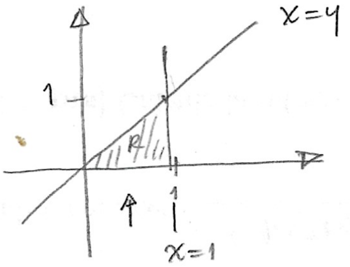
$$R \overset{\text{sth}}{=} \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1 \wedge 0\le y\le \sqrt{x}\}$$
$$\cup\, \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\le x\le 2 \wedge 0\le y\le 2-x\}$$

$$\Rightarrow \int_0^1\int_{y^2}^{2-y} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1\int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx + \int_1^2\int_0^{2-x} f(x,y)\,dy\,dx$$

3) Región de integración

$$R \overset{\text{sth}}{=} \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le y\le 1 \wedge y\le x\le 1\}$$



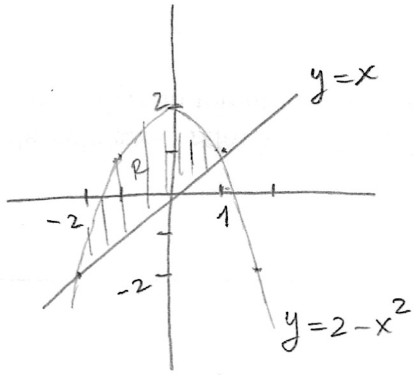
$$R \overset{\text{sth}}{=} \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1 \wedge 0\le y\le x\}$$

Luego,

$$\int_0^1\int_y^1 \sqrt{1+x^2}\,dx\,dy$$

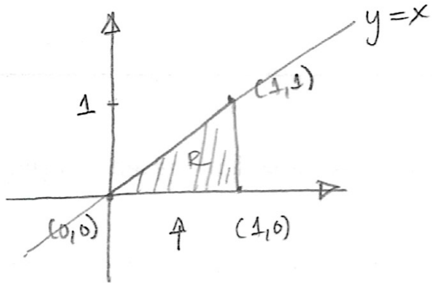
$$= \int_0^1\int_0^x \sqrt{1+x^2}\,dy\,dx = \frac{2\sqrt{2}-1}{3} \approx 0{,}609$$

4)



$$a(R) = \int_{-2}^1\int_x^{2-x^2} dy\,dx = 9/2$$

5)



- $a(R) = 1/2$

- $$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_0^1\int_0^x e^{x^2}\,dy\,dx = \frac{e-1}{2}$$

$$\Rightarrow \bar{f}_R = \frac{1}{1/2}\cdot\frac{e-1}{2}$$

$$= e-1 \approx 1{,}718$$