UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas y Estadística
Segundo parcial de Cálculo III (ANEC) 202410
Fila A
Abril 3 de 2024

Nombre completo:______________________________Código:______________________________Tiempo: 100 min.

1. **[12 pts]** En cierto país se determina que la distribución del ingreso para ingenieros está dada por la curva de Lorenz $L_1(x) = \frac{3}{7}x^2 + \frac{4}{7}x$ en tanto que para arquitectos está dada por $L_2(x) = \frac{6}{11}x^4 + \frac{5}{11}x$. Calcule el índice de Gini para cada curva de Lorenz. ¿Cuál profesión tiene la distribución del ingreso más equitativa?

---

2. **[14 pts]** En el siguiente problema, la primera ecuación es una ecuación de demanda y la segunda es una ecuación de oferta de un producto. Determine el excedente de los consumidores bajo equilibrio del mercado.
$$p = 2200 - q^2 \qquad \text{y} \qquad p = 400 + q^2.$$

---

3. **[6 pts]** Suponga que el costo de producir q unidades de cierto artículo está dado por
$$C(q) = 4000 + 10q + 0.1q^2$$
Encuentre el costo promedio en el intervalo de $q = 100$ a $q = 500$.

---

4. **[8 pts]** A la edad de 25 años, Tom empieza a depositar anualmente \$2 500 en una cuenta individual de retiro que paga interés a una tasa anual de 5% capitalizado continuamente. Suponiendo que sus pagos se hacen como un flujo continuo de ingresos, ¿cuánto dinero habrá en su cuenta si se jubila a la edad de 60 años?

---

5. **[10 pts]** Suponga que X es una variable aleatoria continua con función de densidad dada por
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1000}{x^2} & \text{si } x > 1000, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$
Encuentre $P(1000 < X < 2000)$ y $P(X > 5000)$.

Fórmulas:

$$IG = 2\int_0^1 [x - L(x)]dx; \qquad EC = \int_0^{q_0} [f(q) - p_0]dq; \qquad \bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx;$$

$$VF = e^{rT}\int_0^T f(t)e^{-rt}dt; \qquad P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Solución fila A

1) Índice de Gini para ingenieros

$$IG_1 = 2\int_0^1 [x - L_1(x)]\,dx$$

$$= 2\int_0^1 \left[x - \frac{3}{7}x^2 - \frac{4}{7}x\right]dx = \frac{1}{7} \approx 0,142$$

Índice de Gini para arquitectos

$$IG_2 = 2\int_0^1 [x - L_2(x)]\,dx$$

$$= 2\int_0^1 \left[x - \frac{6}{11}x^4 - \frac{5}{11}x\right]dx = \frac{18}{55} \approx 0,327$$

Dado que $IG_1 < IG_2$, entonces el ingreso de los ingenieros está más uniformemente distribuido que el ingreso de los arquitectos.

2) La solución del sistema

$$\begin{cases} p = 2200 - q^2 \\ p = 400 + q^2 \end{cases}$$

es $q = 30$ y $p = 1300$. Entonces, el punto de equilibrio del mercado es

$$p_0 = 1300 \quad y \quad q_0 = 30.$$

Por tanto,

$$EC = \int_0^{30} [2200 - q^2 - 1300]\,dq = 18000$$

3)

$$\overline{C} = \frac{1}{500 - 100}\int_{100}^{500} (4000 + 10q + 0,1q^2)\,dq$$

$$= \frac{52000}{3} \approx 17333,\overline{3}.$$

4) $f(t) = 2500$, $r = 0,05$ y $T = 35$

$$\Rightarrow VF = e^{0,05 \cdot 35}\int_0^{35} 2500\,e^{-0,05t}\,dt$$

$$= e^{1.75} \cdot 2500\left(20 - 20e^{-1.75}\right)$$

$$\approx 237730,133$$

Dinero ahorrado por Tom para su jubilación

5)

$$P(1000 < X < 2000) = \int_{1000}^{2000} \frac{1000}{x^2}\,dx = 0,5$$

$$P(X > 5000) = \int_{5000}^{\infty} \frac{1000}{x^2}\,dx = \frac{1}{5} = 0,2$$

Departamento de Matemáticas y Estadística
Segundo parcial de Cálculo III (ANEC) 202410
Fila B
Abril 3 de 2024

Nombre completo:______________________________Código:______________________________Tiempo: 100 min.

1. [**12 pts**] En cierto país se determina que la distribución del ingreso para arquitectos está dada por la curva de Lorenz $L_1(x) = \frac{7}{11}x^2 + \frac{4}{11}x$ en tanto que para ingenieros está dada por $L_2(x) = \frac{4}{5}x^4 + \frac{1}{5}x$. Calcule el índice de Gini para cada curva de Lorenz. ¿Cuál profesión tiene la distribución del ingreso más equitativa?

---

2. [**14 pts**] En el siguiente problema, la primera ecuación es una ecuación de demanda y la segunda es una ecuación de oferta de un producto. Determine el excedente de los productores bajo equilibrio del mercado.
$$p = 3700 - q^2 \qquad \text{y} \qquad p = 500 + q^2.$$

---

3. [**6 pts**] Suponga que el costo de producir q unidades de cierto artículo está dado por
$$C(q) = 3000 + 20q + 0.2q^2$$
Encuentre el costo promedio en el intervalo de $q = 200$ a $q = 600$.

---

4. [**8 pts**] Cuando Sue tiene 30 años empieza a depositar \$2 000 en un fondo de bonos que paga 8% de interés anual capitalizado continuamente. Suponiendo que sus depósitos se hacen como un flujo continuo de ingresos, ¿cuánto dinero habrá en su cuenta si se jubila a los 55 años de edad?

---

5. [**10 pts**] A continuación $f(x)$ es una función de densidad para una variable aleatoria X.
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}e^{-x/10} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$
Use integración para hallar las probabilidades $P(X \leq 2)$ y $P(X \geq 5)$.

Fórmulas:

$$IG = 2\int_0^1 [x - L(x)]dx; \qquad EP = \int_0^{q_0} [p_0 - g(q)]dq; \qquad \bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx;$$

$$VF = e^{rT}\int_0^T f(t)e^{-rt}dt; \qquad P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Solución fila B

1) Índice de Gini para arquitectos

$$IG_1 = 2\int_0^1 [x - L_1(x)]\,dx$$

$$= 2\int_0^1 \left[x - \frac{7}{11}x^2 - \frac{4}{11}x\right]dx = \frac{7}{33} = 0,\overline{21}$$

Índice de Gini para ingenieros

$$IG_2 = 2\int_0^1 [x - L_2(x)]\,dx$$

$$= 2\int_0^1 \left[x - \frac{4}{5}x^4 - \frac{1}{5}x\right]dx = \frac{12}{25} = 0,48$$

Dado que $IG_1 < IG_2$, entonces el ingreso de los arquitectos está más uniformemente distribuido que el ingreso de los ingenieros.

2) La solución del sistema

$$\begin{cases} p = 3700 - q^2 \\ p = 500 + q^2 \end{cases}$$

es $q = 40$ y $p = 2100$. Entonces, el punto de equilibrio del mercado es

$$p_0 = 2100 \text{ y } q_0 = 40.$$

Por tanto,

$$EP = \int_0^{40} [2100 - (500 + q^2)]\,dq$$

$$= \frac{128000}{3} \approx 42666,\overline{6}$$

3)

$$\overline{C} = \frac{1}{600-200}\int_{200}^{600} (3000 + 20q + 0,2q^2)\,dq$$

$$= \frac{137000}{3} \approx 45666,\overline{6}$$

4) $f(t) = 2000$, $r = 0,08$, $T = 25$

$$\Rightarrow VF = e^{0,08\cdot 25}\int_0^{25} 2000\cdot e^{-0,08t}\,dt$$

$$= e^2 \cdot 2000\left(\frac{25}{2} - \frac{25}{2}e^{-2}\right)$$

$$\approx 159726,402$$

Dinero en la cuenta de Sue al momento de jubilarse.

5)

$$P(X \le 2) = \int_0^2 \frac{1}{10}e^{-x/10}\,dx.$$

$$= 1 - e^{-0,2} \approx 0,181$$

$$P(X \ge 5) = \int_5^\infty \frac{1}{10}e^{-x/10}\,dx.$$

$$= e^{-0,5} \approx 0,606.$$