Departamento de Matemáticas y Estadística
Primer parcial de Cálculo III (ANEC) 202430
Fila A
Agosto 28 de 2024

UNIVERSIDAD DEL NORTE

Nombre completo: ____Código:____________

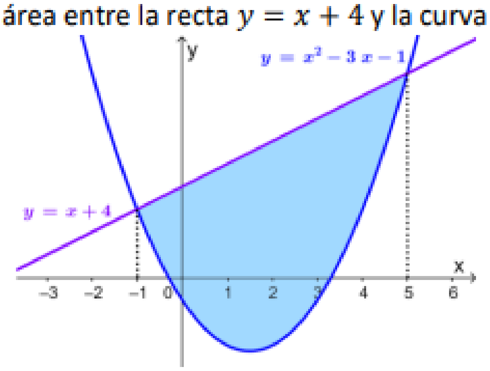
1. A. [1 Pto] Un fabricante estima que el costo marginal por producir q unidades de cierto producto es $C'(q) = 4q^3 - 12q + 40$ dólares por unidad. Si el costo de producción de 10 unidades es de $10 000, ¿Cuál es el costo de producción de 30 unidades?

   B. [1 Pto] Resolver la siguiente integral por el método de sustitución
$$\int 8x\sqrt{4x^2-3}\,dx$$

2. [1.0 Pto] Un estudio indica que dentro de t meses la población de cierta ciudad crecerá a una tasa de $P'(t) = 5 + 3\sqrt[3]{t}$ habitantes por mes. ¿En cuánto se incrementará la población de la ciudad en los próximos 8 meses?

3. [1.0 Pto] Emplee la regla del trapecio y el valor $n = 4$ para estimar la integral
$$\int_{-2}^{2} \frac{2}{\sqrt{1+x^2}}$$

4. [1.0 Pto] Calcule el área entre la recta $y = x + 4$ y la curva $y = x^2 - 3x - 1$



Tiempo máximo: **100 minutos.**

Importante:

- Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, ¡**será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude y apertura del correspondiente proceso disciplinario**!
- Justifique detalladamente cada afirmación. Cualquier respuesta sin su respectivo procedimiento quedara anulada.

Parcial A

SOLUCIÓN 1A

1. A. [**1 Pto**] Un fabricante estima que el costo marginal por producir q unidades de cierto producto es $C'(q) = 4q^3 - 12q + 40$ dólares por unidad. Si el costo de producción de 10 unidades es de $10 000, ¿Cuál es el costo de producción de 30 unidades?

Para calcular la función de costo integramos de manera indefinida con respecto al nivel de producción q

$$C(q) = \int (4q^3 - 12q + 40)\,dq = q^4 - 6q^2 + 40q + K$$

$$C(q) = q^4 - 6q^2 + 40q + K \qquad (1)$$

Donde K es la constante de integración. Teniendo en cuenta la condición inicial (c(10)=10 000) Obtenemos

$$3000 = (10)^4 - 6(10)^2 + 40(10) + K$$

$$3000 = 9800 + K$$

$$K = 200$$

Sustituyendo el valor de K en la expresión (1), obtenemos la forma de la función de costo

$$C(q) = q^4 - 6q^2 + 40q + 200$$

Para responder la pregunta, en la función de costo hallamos

$$C(30) = (30)^4 - 6(30)^2 + 40(30) + 200 = 806\,000$$

Por tanto, el costo de producción de 30 unidades es de $806 000 dólares.

SOLUCIÓN 1B

B. [**1 Pto**] Resolver la siguiente integral por el método de sustitución

$$\int 8x\sqrt{4x^2 - 3}\,dx$$

Sustitución $\quad u = 4x^2 - 3, \qquad du = 8xdx$

$$\int u^{1/2}du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{(4x^2 - 3)^3} + c$$

2. [**1.0 Pto**] Un estudio indica que dentro de t meses la población de cierta ciudad crecerá a una tasa de $P'(t) = 5 + 3\sqrt[3]{t}$ habitantes por mes. ¿En cuánto se incrementará la población de la ciudad en los próximos 8 meses?

Incremento de la población en los próximos 8 meses,

$$\int_0^8 (5 + 3t^{\frac{1}{3}})dt = 5t + \frac{9}{4}(\sqrt[3]{t})^4 \begin{matrix} t = 8 \\ t = 0 \end{matrix} = 5(8) + \frac{9}{4}\left(\sqrt[3]{8}\right)^4 = 40 + 36 = 76$$

Será de 76 habitantes.

3. [**1.0 Pto**] Emplee la regla del trapecio y el valor $n = 4$ para estimar la integral

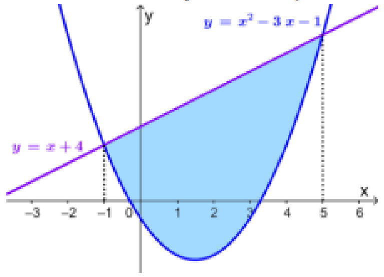
$$\int_{-2}^{2} \frac{2}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$a = -2, b = 2 \quad h = \frac{2 - (-2)}{4} = 1$$

$x_0 = -2$	$f(-2) = \frac{2}{\sqrt{5}} = 0.895$	$f(-2)$
$x_1 = -1$	$f(-1) = \frac{2}{\sqrt{2}} = 1.414$	$2f(-1)$
$x_2 = 0$	$f(0) = 2$	$2f(0)$
$x_3 = 1$	$f(1) = \frac{2}{\sqrt{2}} = 1.414$	$2f(1)$
$x_4 = 2$	$f(2) = \frac{2}{\sqrt{5}} = 0.895$	$f(2)$
		$\sum = 11.446$

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx = \frac{1}{2}\sum = 5.723$$

4. [**1.0 Pto**] Calcule el área entre la recta $y = x + 4$ y la curva $y = x^2 - 3x - 1$



$$A = \int_{-1}^{5} (x+4)dx - \int_{-1}^{5} (x^2 - 3x - 1)dx$$

$$= \int_{-1}^{5} (x+4) - (x^2 - 3x - 1)dx$$

$$= \int_{-1}^{5} (-x^2 + 4x + 5)dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 5x \right]_{-1}^{5}$$

$$= \left[-\frac{(5)^3}{3} + 2(5)^2 + 5(5) \right] - \left[-\frac{(-1)^3}{3} + 2(-1)^2 + 5(-1) \right]$$

$$= \left[-\frac{125}{3} + 50 + 25 \right] - \left[\frac{1}{3} + 2 - 5 \right]$$

$$= \frac{100}{3} + \frac{8}{3}$$

$$= \frac{108}{3}$$

$$= 36$$

Departamento de Matemáticas y Estadística
Primer parcial de Cálculo III (ANEC) 202430
Fila B
Agosto 28 de 2024

Nombre completo: ____Código:____________

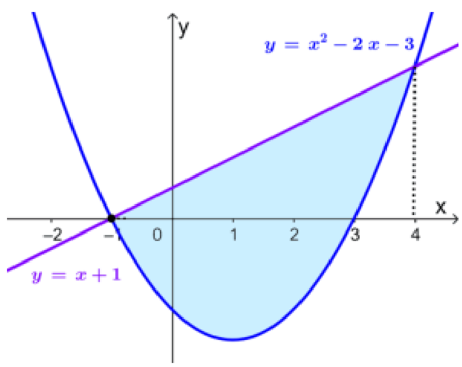
1. A. [1 Pto] Un fabricante estima que el costo marginal por producir q unidades de cierto producto es $C'(q) = 5q^4 - 24q^2 + 80$ dólares por unidad. Si el costo de producción de 5 unidades es de $3 000, ¿Cuál es el costo de producción de 20 unidades?

   B. [1 Pto] Resolver la siguiente integral por el método de sustitución
$$\int 8x^3 \sqrt{9 + 2x^4}\, dx$$

2. [1.0 Pto] Un estudio indica que dentro de t meses la población de cierta ciudad crecerá a una tasa de $P'(t) = 10\sqrt[3]{t} + 2t$ habitantes por mes. ¿En cuánto se incrementará la población de la ciudad en los próximos 27 meses?

3. [1.0 Pto] Emplee la regla del trapecio y el valor $n = 4$ para estimar la integral
$$\int_{-2}^{2} \sqrt{x^2 + 1}\, dx$$

4. [1.0 Pto] Calcule el área entre la recta $y = x + 1$ y la curva $y = x^2 - 2x - 3$



Tiempo máximo: **100 minutos.**

PARCIAL B

1. A. [**1 Pto**] Un fabricante estima que el costo marginal por producir q unidades de cierto producto es $C'(q) = 5q^4 - 24q^2 + 80$ dólares por unidad. Si el costo de producción de 5 unidades es de $3 000, ¿Cuál es el costo de producción de 20 unidades?

SOLUCIÓN 1A

Para calcular la función de costo integramos de manera indefinida con respecto al nivel de producción q

$$C(q) = \int (5q^4 - 24q^2 + 80)\,dq = q^5 - 8q^3 + 80q + K$$

$$C(q) = q^5 - 8q^3 + 80q + K \qquad (1)$$

Donde K es la constante de integración. Teniendo en cuenta la condición inicial (c(5)=3 000) Obtenemos

$$3000 = (5)^4 - 6(5)^2 + 40(5) + K$$

$$3000 = 2525 + K$$

$$K = 475$$

Sustituyendo el valor de K en la expresión (1), obtenemos la forma de la función de costo

$$C(q) = q^5 - 8q^3 + 80q + 475$$

Para responder la pregunta, en la función de costo hallamos

$$C(20) = 3\,138\,075$$

Por tanto, el costo de producción de 20 unidades es de $3 138 075 dólares.

SOLUCIÓN 1B

B. [**1 Pto**] Resolver la siguiente integral por el método de sustitución

$$\int 8x^3\sqrt{9 + 2x^4}\,dx$$

Sustitución $u = 9 + 2x^4$, $du = 8x^3dx$

$$\int u^{1/2}du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{(9 + 2x^4)^3} + c$$

2. [**1.0 Pto**] Un estudio indica que dentro de t meses la población de cierta ciudad crecerá a una tasa de $P'(t) = 10\sqrt[3]{t} + 2t$ habitantes por mes. ¿En cuánto se incrementará la población de la ciudad en los próximos 27 meses?

Incremento de la población en los próximos 27 meses,

$$\int_0^{27} (2t + 10t^{\frac{1}{3}})dt = t^2 + \frac{15}{2}(\sqrt[3]{t})^4 \Big|_{t=0}^{t=27} = 1\,336$$

Será de 1 336 habitantes.

3. [**1.0 Pto**] Emplee la regla del trapecio y el valor $n = 4$ para estimar la integral

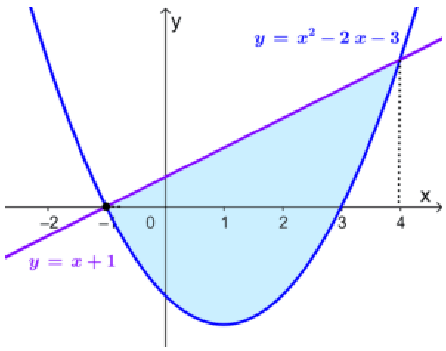
$$\int_{-2}^{2} \sqrt{x^2 + 1}\, dx$$

$$a = -2, b = 2 \quad h = \frac{2 - (-2)}{4} = 1$$

$x_0 = -2$	$f(-2) = \sqrt{5}$	$f(-2)$
$x_1 = -1$	$f(-1) = \sqrt{2}$	$2f(-1)$
$x_2 = 0$	$f(0) = 1$	$2f(0)$
$x_3 = 1$	$f(1) = \sqrt{2}$	$2f(1)$
$x_4 = 2$	$f(2) = \sqrt{5}$	$f(2)$
		$\sum = 12.129$

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx = \frac{1}{2}\sum = 6.0645$$

4. [**1.0 Pto**] Calcule el área entre la recta $y = x + 1$ y la curva $y = x^2 - 2x - 3$



En este caso, parte del área requerida está bajo el eje x. Sin embargo, el área de la región puede ser calculada usando el mismo método. Entonces, tenemos:

$$A = \int_{-1}^{4} (x+1)dx - \int_{-1}^{4} (x^2 - 2x - 3)dx$$

$$= \int_{-1}^{4} (x+1)-(x^2 - 2x - 3)dx$$

$$= \int_{-1}^{4} (-x^2 + 3x + 4)dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 4x\right]_{-1}^{4}$$

$$= \left[-\frac{64}{3} + 24 + 16\right] - \left[\frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 4\right]$$

$$= \frac{56}{3} + \frac{13}{6}$$

$$= \frac{125}{6}$$

El área de la región requerida es $\frac{125}{6}$.