Universidad Del Norte
Departamento Matemáticas y Estadística

October 23, 2024
Docente: Gustavo Vergara
Examen: Primer Parcial (Fila A)

El siguiente es el primer parcial de la asignatura de cálculo 3 ANEC. El examen tendrá una duración de 100 minutos. Justifique adecuadamente de acuerdo a lo visto en clases. **Cualquier intento de copia será motivo de anulación. El préstamo de útiles o calculadoras está prohibido.**

Name:____

1. (1.5 pts) Resuelva cada integral. Puede usar cualquiera de los métodos vistos en clase.

   (a)
   $$\int \left(\frac{e^x}{2} + x\right) dx.$$

   (b)
   $$\int \frac{e^x}{e^x - 1} dx$$
   (*Sugerencia:* Use sustitución).

   (c)
   $$\int x^2 e^x dx$$
   (*Sugerencia:* Use integración por partes).

---

2. (1.5 pts) Halle el área entre las curvas $y = x^2 - 2x$ y $y = 3x - 6$. Trace la región (opcional), construya la integral y resuélvala.

---

3. (1.5 pts) La siguiente integral SOLO se puede resolver de manera numérica (Regla del trapecio o de Simpson). Resuélvala tomando $n = 6$.
   $$\int_0^{1.2} e^{x^2} dx.$$
   Aproxime a dos cifras decimales.

---

4. (0.5 pts) Calcule el área bajo la curva $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ en el intervalo (2,4).

---

1 Respuestas

1. (a)
$$\frac{e^x}{2} + \frac{x^2}{2} + C.$$

   (b) Tome $u = e^x - 1$ por lo que $du = e^x dx$. Nuestra integral se transforma en $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$. El resultado final es $\ln|e^x - 1| + C$.

   (c) Tome $u = x^2$ y $dv = e^x$ por lo que $du = 2xdx$ y $v = e^x$. Realizando integración por pares obtenemos:
$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\int xe^x dx.$$
   Ahora aplique nuevamente partes a la segunda integral. Tome $u = x$ y $dv = e^x$, por lo que $du = dx$ y $v = e^x$:
$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\int xe^x dx = x^2 e^x - 2(xe^x - e^x) + C = e^x(x^2 - 2x + 2) + C.$$
   Cualquier respuesta equivalente o por tabulación es aceptada.

2. Igualando ambas expresiones obtenemos $x^2 - 2x = 3x - 6$ de donde se sigue que $x^2 - 5x + 6 = 0$. Esta ecuación tiene solución siempre que $x = 2$ o $x = 3$. Entonces, el área es:
$$A = \left|\int_2^3 x^2 - 5x + 6dx\right| = \left|\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} + 6x\right|_2^3 = \frac{1}{6}$$

3. El detalle del ejercicio lo podemos revisar en clase. Tome $a = 0$, $b = 1.2$ y $n = 6$. Luego $\Delta x = 0.2$. Los resultados:
```
e^x**0.0 = 1.0
e^x**0.2 = 1.0408107741923882
e^x**0.4 = 1.1735108709918103
e^x**0.6 = 1.4333294145603404
e^x**0.8 = 1.8964808793049517
e^x**1.0 = 2.718281828459045
e^x**1.2 = 4.220695816996552
```
   Aproximando por trapecio obtenemos un aproximado de 2.17. Por Simpsons es de 2.14. Se estará evaluando que tan alejado está de la respuesta por los decimales.

4. Reescribiendo $\frac{x+1}{x-1} = 1 - \frac{2}{x+1}$ se tiene que:
$$\int_2^4 \frac{x-1}{x+1}dx = \int_2^4 1 - \frac{2}{x+1}dx = x - 2\ln|x+1|_2^4 = 2 - 2\ln(5) + 2\ln(3) \approx 0.978.$$

The End.

Universidad Del Norte
Departamento Matemáticas y Estadística

October 23, 2024
Docente: Gustavo Vergara
Examen: Primer Parcial (Fila B)

El siguiente es el primer parcial de la asignatura de cálculo 3 ANEC. El examen tendrá una duración de 100 minutos. Justifique adecuadamente de acuerdo a lo visto en clases. **Cualquier intento de copia será motivo de anulación. El préstamo de útiles o calculadoras está prohibido.**

Name:____

1. (1.5 pts) Resuelva cada integral. Puede usar cualquiera de los métodos vistos en clase.

   (a)
   $$\int \left(\frac{e^x}{2} + x^2\right) dx.$$

   (b)
   $$\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx$$

   (*Sugerencia:* Use sustitución).

   (c)
   $$\int x^2 e^x dx$$

   (*Sugerencia:* Use integración por partes).

---

2. (1.5 pts) Halle el área entre las curvas $y = x^2 - 2x$ y $y = 5x - 12$. Trace la región (opcional), construya la integral y resuélvala.

---

3. (1.5 pts) La siguiente integral SOLO se puede resolver de manera numérica (Regla del trapecio o de Simpson). Resuélvala tomando $n = 6$.
   $$\int_0^{1.2} e^{-x^2} dx.$$

   Aproxime a dos cifras decimales.

---

4. (0.5 pts) Calcule el área bajo la curva $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ en el intervalo (2,4).

---

1 Respuestas

1. (a)
$$\frac{e^x}{2} + \frac{x^3}{3} + C.$$

   (b) Tome $u = e^x + 1$ por lo que $du = e^x dx$. Nuestra integral se transforma en $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$. El resultado final es $\ln|e^x + 1| + C$. En este caso es válido sin el valor absoluto.

   (c) Tome $u = x^2$ y $dv = e^x$ por lo que $du = 2xdx$ y $v = e^x$. Realizando integración por pares obtenemos:
$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int xe^x dx.$$
Ahora aplique nuevamente partes a la segunda integral. Tome $u = x$ y $dv = e^x$, por lo que $du = dx$ y $v = e^x$:
$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int xe^x dx = x^2 e^x - 2(xe^x - e^x) + C = e^x(x^2 - 2x + 2) + C.$$
Cualquier respuesta equivalente o por tabulación es aceptada.

2. Igualando ambas expresiones obtenemos $x^2 - 2x = 5x - 12$ de donde se sigue que $x^2 - 7x + 12 = 0$. Esta ecuación tiene solución siempre que $x = 3$ o $x = 4$. Entonces, el área es:
$$A = \left| \int_3^4 x^2 - 7x + 12 dx \right| = \left| \frac{x^3}{3} - 7\frac{x^2}{2} + 12x \right|_3^4 = \frac{1}{6}$$

3. El detalle del ejercicio lo podemos revisar en clase. Tome $a = 0$, $b = 1.2$ y $n = 6$. Luego $\Delta x = 0.2$. Los resultados:
```
e^-x**0.0 = 1.0
e^-x**0.2 = 0.9607894391523232
e^-x**0.4 = 0.8521437889662113
e^-x**0.6 = 0.697676326071031
e^-x**0.8 = 0.5272924240430485
e^-x**1.0 = 0.36787944117144233
e^-x**1.2 = 0.23692775868212176
```
Aproximando por trapecio o Simpsons obtenemos un aproximado de 0.84. Se estará evaluando que tan alejado está de la respuesta por los decimales.

4. Reescribiendo $\frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x+1}$ se tiene que:
$$\int_2^4 \frac{x+1}{x-1} dx = \int_2^4 1 + \frac{2}{x-1} dx = x + 2\ln|x-1|_2^4 = 2 + 2\ln(3) \approx 4.19.$$

The End.