Departamento de Matemáticas y Estadística
Taller de preparación para el Parcial II
Cálculo III (ANEC)

INTEGRAL IMPROPIA

Este taller tiene el propósito de ofrecer al estudiante un buen material de estudio que abarca parte de la temática del segundo corte de la asignatura, ver Parcelación y Programación Semanal del curso. La mayoría de los ejercicios son tomados de los textos [1] y [2]. Para ejercicios similares a los que aquí están planteados puede revisar los parciales aplicados en semestres anteriores, ver página web de la materia:

`https://www.uninorte.edu.co/web/departamento-de-matematicas-y-estadistica/calculo-3-anec`

1. Determine las siguientes integrales impropias, en caso de que existan.

   a) $\displaystyle\int_3^\infty \frac{1}{x^3}dx$

   b) $\displaystyle\int_3^\infty \frac{1}{2x-1}dx$

   c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{(3x-1)^2}dx$

   d) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$

   e) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{(x+2)^2}}dx$

   f) $\displaystyle\int_{37}^\infty e^{-x}dx$

   g) $\displaystyle\int_0^\infty (5+e^{-x})dx$

   h) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

   i) $\displaystyle\int_4^\infty \frac{x}{\sqrt{(x^2+9)^3}}dx$

   j) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-3} \frac{1}{(x+1)^2}dx$

   k) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}dx$

   l) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty 2xe^{-x^2}dx$

   m) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty (5-3x)dx$

   n) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{2x}dx$

   ñ) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty xe^{1-x^2}dx$

   o) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^2}{(x^3+2)^2}dx$

   p) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

   q) $\displaystyle\int_0^\infty 2xe^{-3x}dx$

   r) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}dx$

   s) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x\ln x}dx$

   t) $\displaystyle\int_1^\infty x^{-3/2}dx$

   u) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}dx$

   v) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx$

   w) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$

---

2. La función de densidad para la vida x, en horas, de un componente electrónico en un medidor de radiación está dada por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{k}{x^2} & \text{para } x\geq 800,\\ 0 & \text{para } x<800.\end{cases}$$

   a) Si k satisface la condición de que $\int_{800}^\infty f(x)dx=1$, encuentre k.

   b) La probabilidad de que el componente dure por lo menos 1200 horas está dada por $\int_{1200}^\infty f(x)dx$. Evalúe esta integral.

---

3. Para un negocio, el valor presente de todas las utilidades futuras a un interés anual r compuesto continuamente está dado por

$$\int_0^\infty p(t)e^{-rt}dt$$

   donde $p(t)$ es la utilidad anual en el tiempo t. Con $p(t)=500\,000$ y $r=0{,}02$, evalúe esta integral.

---

4. Un donador desea otorgar una beca a un colegio local con un regalo que proporcione un flujo continuo de ingresos a razón de $25\ 000 + 1\ 200t$ dólares por año a perpetuidad. Suponiendo que la tasa prevaleciente de interés anual permanezca fija a $5\,\%$ capitalizada continuamente, ¿qué cantidad se requiere para financiar la donación?

---

5. Una inversión generará \$2 400 al año a perpetuidad. Si el dinero se genera continuamente en el año y si la tasa prevaleciente de interés anual permanece fija a $4\,\%$ capitalizada continuamente, ¿cuál es el valor presente de la inversión?

---

6. Se estima que dentro de t años, un complejo de apartamentos estará generando utilidad para su propietario a razón de $f(t) = 10\ 000 + 500t$ dólares por año. Si la utilidad se genera a perpetuidad y la tasa prevaleciente de interés anual permanece fija a $5\,\%$ capitalizada continuamente, ¿cuál es el valor presente del complejo de apartamentos?

---

7. La administración de una cadena nacional de restaurantes de comida rápida está vendiendo una franquicia permanente en Seattle, Washington. La experiencia en lugares semejantes sugiere que dentro de t años, la franquicia estará generando utilidades a razón de $f(t) = 12\ 000 + 900t$ dólares por año. Si la tasa prevaleciente de interés permanece fija a $5\,\%$ capitalizada continuamente, ¿cuál es el valor presente de la franquicia?

---

8. Un rico patrocinador de un pequeño colegio privado desea donar una cátedra de matemáticas con un regalo de G mil dólares. Suponga que el matemático que ocupa la cátedra va a recibir \$70 000 por año en salarios y prestaciones. Si el dinero cuesta $8\,\%$ por año capitalizado continuamente, ¿cuál es el valor mínimo posible de G?

---

9. El costo capitalizado de una propiedad es la suma del costo original de la propiedad y el valor presente de mantener la propiedad. Suponga que una compañía está considerando la compra de dos máquinas diferentes. La máquina 1 cuesta \$10 000 y dentro de t años su mantenimiento costará $M_1(t) = 1\ 000(1 + 0{,}06t)$ dólares. La máquina 2 cuesta sólo \$8 000, pero el costo de su mantenimiento en el momento t es $M_2(t) = 1\ 100$ dólares. Si el costo del dinero es $9\,\%$ por año capitalizado continuamente, ¿cuál es el costo capitalizado de cada máquina? ¿Cuál máquina debe comprar la compañía?

Referencias

[1] E. F. Haeussler, R. S. Paul, and R. J. Wood. *Matemáticas para administración y economía.* Pearson, décimo tercera edición, 2015.

[2] L. Hoffmann, G. Bradley, and K. H. Rosen. *Cálculo aplicado para administración, economía y ciencias sociales.* McGraw-Hill Interamericana, octava edición, 2006.