Departamento de Matemáticas y Estadística
Taller de preparación para el Parcial I
Cálculo III (ANEC)

INTEGRAL INDEFINIDA

Este taller tiene el propósito de ofrecer al estudiante un buen material de estudio que abarca parte de la temática del primer corte de la asignatura, ver Parcelación y Programación Semanal del curso. La mayoría de los ejercicios son tomados de los textos [1], [2], [3] y [4]. Para ejercicios similares a los que aquí están planteados puede revisar los parciales aplicados en semestres anteriores, ver página web de la materia:

`https://www.uninorte.edu.co/web/departamento-de-matematicas-y-estadistica/calculo-3-anec`

1. Encuentre cada integral indefinida.

   a) $\int 4x(1-x)dx$
   b) $\int x^3(2-x^4)dx$
   c) $\int \frac{dt}{\sqrt[3]{t^2}}$
   d) $\int \frac{e^x-3x^2}{2}dx$
   e) $\int \frac{4x^5-x^3}{x^2}dx$
   f) $\int \frac{x^{-2}-x^5}{x^2}dx$
   g) $\int \frac{3-x^2e^x}{x^2}dx$
   h) $\int \left(\frac{3}{2y^3}+\frac{4}{\sqrt[4]{y^3}}\right)dy$
   i) $\int \frac{x^3-4x+5}{\sqrt{x}}dx$
   j) $\int (x^4-3x^2)(1/x-8)dx$
   k) $\int 3x^2(2x-1)^3dx$
   l) $\int \ln(e^{-x^9})dx$

---

2. Use el método de integración por sustitución para calcular las integrales dadas.

   a) $\int 3x^2(x^3-5)^6dx$
   b) $\int 6xe^{x^2}dx$
   c) $\int \sqrt{5x-3}dx$
   d) $\int 5x^4\sqrt{1+x^5}dx$
   e) $\int (x-8)^{10}dx$
   f) $\int \frac{x+5}{x+3}dx$
   g) $\int x\sqrt{x+3}dx$
   h) $\int \frac{x}{\sqrt{x-2}}dx$
   i) $\int \frac{x^2-1}{x^3-3x+7}dx$
   j) $\int x^3\sqrt{1+x^2}dx$
   k) $\int \frac{x^3}{(1+x^2)^3}dx$
   l) $\int \frac{\ln^2 x}{x}dx$
   m) $\int \frac{1}{x\ln^2 x}dx$
   n) $\int \frac{e^x}{2e^x-1}dx$
   ñ) $\int \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$
   o) $\int \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}dx$
   p) $\int (e^x-e^{-x})^2dx$
   q) $\int \frac{3-e^{2x}}{5e^x}dx$
   r) $\int \frac{(e^{-x}+6)^2}{e^x}dx$
   s) $\int \frac{4x\ln(x^2+9)}{x^2+9}dx$
   t) $\int \frac{2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}dx$
   u) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$
   v) $\int \frac{xe^{x^2}}{\sqrt{e^{x^2}+2}}dx$
   w) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{2-5x}}dx$

---

3. Use integración por partes para determinar las siguientes integrales.

   a) $\int xe^{-x}dx$
   b) $\int (x-4)e^xdx$
   c) $\int x^3e^{5x}dx$
   d) $\int \ln(2x)dx$
   e) $\int \sqrt{x}\ln x dx$
   f) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$
   g) $\int x^3e^xdx$
   h) $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$

$i)\ \int x\ln(1+x^2)dx$ $\quad l)\ \int \ln^2 x dx$ $\quad ñ)\ \int \frac{4x-3}{e^{2x}}dx$ $\quad q)\ \int (x-2)^3\ln(x-2)dx$

$j)\ \int e^x\ln(1+e^x)dx$ $\quad m)\ \int x\ln^3 x dx$ $\quad o)\ \int \sqrt[3]{x}\ln x^5 dx$ $\quad r)\ \int (2x+1)(3x+2)^{1/2}dx$

$k)\ \int \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx$ $\quad n)\ \int x^2\ln x dx$ $\quad p)\ \int (2^x+x)^2 dx$ $\quad s)\ \int (x^2+1)(5x+2)^{-1/2}dx$

---

4. Si el costo marginal de producir x unidades de un bien está dado por

$$C'(x) = 0{,}3x^2 + 2x$$

y el costo fijo es \$2 000, encuentre la función de costo $C(x)$ y el costo de producir 20 unidades.

---

5. Un fabricante determina que el costo marginal es $3q^2-60q+400$ dólares por unidad cuando se producen q unidades. El costo total de producción de las primeras 2 unidades es \$900. ¿Cuál es el costo total de producción de las primeras 5 unidades?

---

6. Un minorista recibe un cargamento de 10 000 kilogramos de arroz que se consumirán en un periodo de 5 meses a una tasa constante de 2 000 kilogramos por mes. Si los costos de almacenamiento son 1 centavo por kilogramo al mes, ¿cuánto pagará el minorista en costos de almacenamiento durante los próximos 5 meses?

---

7. Se ha estimado que dentro de t meses la población de una cierta ciudad cambiará a razón de $4+5t^{2/3}$ personas por mes. Si la población actual es de 10 000, ¿cuál será la población dentro de 8 meses?

---

8. Un fabricante estima que el ingreso marginal será $R'(q) = 100q^{-1/2}$ dólares por unidad cuando el nivel de producción sea de q unidades. Se ha determinado que el costo marginal correspondiente es de $0{,}4q$ dólares por unidad. Suponga que el ingreso del fabricante es \$520 cuando el nivel de producción es de 16 unidades. ¿Cuál es el ingreso del fabricante cuando el nivel de producción es de 25 unidades?

---

9. Un fabricante estima que el costo marginal por producir q unidades de cierto bien es $C'(q) = 3q^2-24q+48$ dólares por unidad. Si el costo de producción de 10 unidades es de \$5 000, ¿cuál es el costo de producción de 30 unidades?

---

10. Las ventas mensuales en una tienda importante actualmente son \$10 000, pero se espera que dentro de t meses disminuyan a una tasa de $S'(t) = -10t^{2/5}$ dólares por mes. La tienda es rentable siempre y cuando el nivel de ventas sea mayor que \$8 000 por mes.

a) Determine una fórmula para las ventas esperadas en t meses.

b) ¿Cuál será el monto de las ventas que se deberá esperar dentro de 2 años?

c) ¿Durante cuántos meses será rentable la tienda?

---

11. En cierta fábrica, cuando se invierten K miles de dólares en la planta, la producción Q cambia a una tasa dada por $Q'(K) = 200K^{-2/3}$ unidades por cada mil dólares invertidos. Cuando se invierten \$8 000, el nivel de producción es de 5 500 unidades.

    a) Determine una fórmula para el nivel de producción Q que se espera cuando se inviertan K miles de dólares.

    b) ¿Cuánta unidades se producen cuando se invierten \$27 000?

    c) ¿Qué inversión de capital K se requerirá para producir 7 000 unidades?

---

12. El departamento de investigación de mercado de una cadena de supermercados ha determinado que, para una tienda, el precio marginal $p'(x)$ en x tubos por semana para una determinada marca de pasta de dientes está dado por

$$p'(x) = -0{,}015e^{-0{,}01x}.$$

Encuentre la ecuación precio-demanda si la demanda semanal es de 50 tubos cuando el precio de un tubo es \$4,35. Determine la demanda semanal cuando el precio de un tubo es \$3,89.

---

13. La tasa de cambio del valor de una casa cuya construcción costó \$350 000 puede modelarse por medio de $\frac{dV}{dt} = 8e^{0{,}05t}$, donde t es el tiempo en años desde que la casa fue construida y V es el valor (en miles de dólares) de la casa. Encuentre $V(t)$.

---

14. El precio marginal para una demanda semanal de x botellas de champú en una farmacia está dado por

$$p'(x) = \frac{-6\ 000}{(3x+50)^2}.$$

Encuentre la ecuación precio-demanda si la demanda semanal es 150 cuando el precio de una botella de champú es \$8. ¿Cuál es la demanda semanal cuando el precio es \$6,50?

---

15. El costo marginal semanal de producir x pares de tenis está dado por

$$C'(x) = 12 + \frac{500}{x+1},$$

donde $C(x)$ es el costo en dólares. Si los costos fijos son \$2 000 por semana, encuentre la función de costos. ¿Cuál es el costo promedio por par de zapatos si se producen 1 000 pares de zapatos cada semana?

---

16. Una empresa de automóviles está lista para introducir una nueva línea de automóviles híbridos mediante una campaña de ventas nacional. Después de probar la línea en una ciudad cuidadosamente seleccionada, el departamento de investigación de mercados estima que las ventas (en millones de dólares) aumentarán a una tasa mensual de

$$S'(t) = 10 - 10e^{-0,1t} \quad 0 \leq t \leq 24$$

t meses después de que haya comenzado la campaña.

   a) ¿Cuáles serán las ventas totales $S(t)$ t meses después del comienzo de la campaña nacional si asumimos que no hubo ventas al comienzo de la campaña?

   b) ¿Cuáles son las ventas totales estimadas para los primeros 12 meses de la campaña?

   c) ¿Cuándo alcanzarán las ventas totales estimadas los 100 millones de dólares?

---

17. Utilizando datos geológicos y de producción, la dirección de una compañía petrolera estima que se bombeará petróleo de un campo que produce a un ritmo dado por

$$R(t) = \frac{100}{t+1} + 5 \quad 0 \leq t \leq 20,$$

donde $R(t)$ es la tasa de producción (en miles de barriles por año) t años después de que comienza el bombeo. ¿Cuántos barriles de petróleo $Q(t)$ producirá el campo en los primeros t años si $Q(0) = 0$?¿Cuántos barriles se producirán en los primeros 9 años?

---

18. El propietario de una cadena de comida rápida determina que si se ofertan x miles de unidades de una nueva comida el precio marginal a ese nivel de oferta estará dado por

$$p'(x) = \frac{x}{(x+3)^2}$$

dólares por unidad, donde $p(x)$ es el precio (en dólares) por unidad a la cual todos las x unidades se venderán. Actualmente, se ofertan 5 000 unidades a un precio de \$2,20 por unidad.

   a) Determine la función de oferta $p(x)$ (precio).

   b) Si se ofertan 10 000 alimentos a restaurantes en la cadena, ¿qué precio unitario se deberá cobrar para que se vendan todas las unidades?

---

19. El gerente de una zapatería determina que el precio p (dólares) por cada par de zapatos deportivos de cierta marca popular, cambia a una tasa de

$$p'(x) = \frac{-300x}{(x^2+9)^{3/2}}$$

cuando los consumidores demandan x (miles) de pares. Cuando el precio es \$75 por par, son demandados 400 pares ($x = 4$).

   a) Determine la función de demanda $p(x)$ (precio).

b) ¿A qué precio se demandarán 500 pares de zapatos deportivos? ¿A qué precio no se demandarán zapatos deportivos?

c) ¿Cuántos pares se demandarán a un precio de \$90 por par?

---

20. Suponga que la función de costo marginal para el producto de un fabricante está dada por

$$\frac{dc}{dq} = \frac{100q^2 - 3998q + 60}{q^2 - 40q + 1}$$

donde c es el costo total en dólares cuando se producen q unidades.

a) Determine el costo marginal cuando se producen 40 unidades.

b) Si los costos fijos son de \$10 000, encuentre el costo total de producir 40 unidades.

---

21. La función de costo marginal para el producto de un fabricante está dada por

$$\frac{dc}{dq} = \frac{9}{10}\sqrt{q}\sqrt{0{,}04q^{3/2} + 4}$$

donde c es el costo total en dólares cuando se producen q unidades. Los costos fijos son de \$360.

a) Determine el costo marginal cuando se producen 25 unidades.

b) Encuentre el costo total de producir 25 unidades.

---

22. El costo marginal (en dólares) de una compañía que fabrica zapatos está dado por

$$C'(x) = \frac{x}{1\ 000}\sqrt{x^2 + 2\ 500}$$

en donde x es el número de pares de zapatos producidos. Si los costos fijos son de \$100, determine la función de costo.

---

23. Un industrial textil tiene un costo marginal (en dólares) por rollo de una tela particular dado por $C'(x) = 20xe^{0{,}01x^2}$, en donde x es el número de rollos producidos de la tela. Si los costos fijos ascienden a \$1 500, determine la función de costo.

---

24. Durante una crisis económica reciente, el porcentaje de desempleados creció a razón de

$$P'(t) = \frac{0{,}4e^{-0{,}1t}}{(1 + e^{-0{,}1t})^2}$$

donde t es el tiempo en meses. Dado que en $t = 0$ había 4 % de desempleados, ¿qué porcentaje estaba desempleado: *a*) 10 meses después *b*) 20 meses después?

---

25. La razón de producción de un pozo petrolero en barriles diarios varía de acuerdo con la fórmula

$$P'(t) = \frac{1\ 200\ 000}{(t + 1\ 600)^{3/2}}$$

donde t es el tiempo (en días) a partir del inicio de la producción. Calcule la producción total hasta el tiempo t. También encuentre la producción total posible, esto es, $\lim_{t \to \infty} P(t)$.

Referencias

[1] J. C. Arya, R. W. Lardner, and V. H. Ibarra Mercado. *Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía*. Pearson, quinta edición, 2009.

[2] R. Barnett, M. Ziegler, K. Byleen, and C. Stocker. *College Mathematics for Business, Economics, Life Sciences, and Social Sciences*. Pearson, fourteenth edition, 2019.

[3] E. F. Haeussler, R. S. Paul, and R. J. Wood. *Matemáticas para administración y economía*. Pearson, décimo tercera edición, 2015.

[4] L. Hoffmann, G. Bradley, and K. H. Rosen. *Cálculo aplicado para administración, economía y ciencias sociales*. McGraw-Hill Interamericana, octava edición, 2006.