UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas y Estadística
Taller de preparación para el Parcial II
Cálculo III (ANEC)

FUNCIONES DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD

Este taller tiene el propósito de ofrecer al estudiante un buen material de estudio que abarca parte de la temática del segundo corte de la asignatura, ver Parcelación y Programación Semanal del curso. La mayoría de los ejercicios son tomados de los textos [1] y [2]. Para ejercicios similares a los que aquí están planteados puede revisar los parciales aplicados en semestres anteriores, ver página web de la materia:

`https://www.uninorte.edu.co/web/departamento-de-matematicas-y-estadistica/calculo-3-anec`

1. Determine si la función dada es una función de densidad de probabilidad.

   a) $f(x) = \begin{cases} \frac{10}{(x+10)^2} & \text{para } x \geq 0, \\ 0 & \text{para } x < 0. \end{cases}$

   b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-2x} & \text{para } x \geq 0, \\ 0 & \text{para } x < 0. \end{cases}$

   c) $f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{para } x \geq 0, \\ 0 & \text{para } x < 0. \end{cases}$

   d) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}\sqrt{x} & \text{para } 0 \leq x \leq 9, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

   e) $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 + 2x & \text{para } -1 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

   f) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3}x & \text{para } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

---

2. Suponga que X es una variable aleatoria continua con función de densidad dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}(x+1) & \text{si } 1 < x < 3, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

   Encuentre $P(1 < X < 2)$, $P(X < 2{,}5)$, $P(X \geq \frac{3}{2})$ y c tal que $P(X < c) = \frac{1}{2}$.

---

3. Suponga que X es una variable aleatoria continua con función de densidad dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1000}{x^2} & \text{si } x > 1000, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

   Encuentre $P(1000 < X < 2000)$ y $P(X > 5000)$.

---

4. Suponga que X es una variable aleatoria continua que se distribuye de manera uniforme en $[1, 4]$. ¿Cuál es la fórmula de la función de densidad para X? Bosqueje su gráfica.

   a) Encuentre $P(\frac{3}{2} < X < \frac{7}{2})$

   b) Encuentre $P(0 < X < 1)$

   c) Encuentre $P(X \leq 3{,}5)$

   d) Encuentre $P(X > 3)$

   e) Encuentre $P(X = 2)$

   f) Encuentre $P(X < 5)$

   g) Encuentre μ

   h) Encuentre σ

   i) Encuentre F y haga su gráfica

5. Suponga que X es una variable aleatoria continua que se distribuye de manera uniforme en $[0, 5]$. ¿Cuál es la fórmula de la función de densidad para X? Bosqueje su gráfica.

   a) Encuentre $P(1 < X < 3)$
   b) Encuentre $P(4{,}5 \leq X < 5)$
   c) Encuentre $P(X = 4)$
   d) Encuentre $P(X > 2)$
   e) Encuentre $P(X < 5)$
   f) Encuentre $P(X > 5)$
   g) Encuentre μ
   h) Encuentre σ
   i) Encuentre F y haga su gráfica

6. Suponga que X se distribuye de manera uniforme en $[a, b]$. ¿Cuál es la función de densidad para X? Encuentre μ y σ.

7. Suponga que X es una variable aleatoria continua con función de densidad dada por

$$f(x) = \begin{cases} k & \text{si } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

   a) Demuestre que $k = \frac{1}{b-a}$ y por tanto X se distribuye de manera uniforme.
   b) Encuentre la función de distribución acumulada F.

8. Suponga que la variable aleatoria X se distribuye de manera uniforme con $k = 2$. Halle $P(1 < X < 2)$, $P(X < 3)$, $P(X > 5)$, $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma)$ y encuentre la función de distribución acumulada F.

9. Suponga que la variable aleatoria X se distribuye de manera exponencial con $k = 0{,}5$.

   a) Encuentre $P(X > 4)$
   b) Halle $P(0{,}5 < X < 2{,}6)$
   c) Encuentre $P(X = 4)$
   d) Halle $P(X < 5)$
   e) Encuentre $P(X > 5)$
   f) Halle c con $P(0 < X < c) = \frac{1}{2}$

10. La función de densidad para una variable aleatoria X está dada por

$$f(x) = \begin{cases} k & \text{si } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Encuentre k, μ, σ, $P(2 < X < 3)$, $P(X > 2{,}5)$, $P(X > 0)$, $P(3 < X < 5)$ y c tal que $P(X < c) = \frac{1}{2}$.

11. La función de densidad para una variable aleatoria X está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + k & \text{si } 2 \leq x \leq 4, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Encuentre k, $P(X \geq 2{,}5)$, μ y $P(2 < X < \mu)$.

---

12. A continuación $f(x)$ es una función de densidad de probabilidad para una variable aleatoria X.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } 2 \leq x \leq 5, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Use integración para hallar las probabilidades $P(2 \leq X \leq 5)$, $P(3 \leq X \leq 4)$ y $P(X \geq 4)$.

---

13. A continuación $f(x)$ es una función de densidad de probabilidad para una variable aleatoria X.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Use integración para hallar las probabilidades $P(0 \leq X \leq 2)$, $P(1 \leq X \leq 2)$ y $P(X \leq 1)$.

---

14. A continuación $f(x)$ es una función de densidad de probabilidad para una variable aleatoria X.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}(4 - x) & \text{si } 0 \leq x \leq 4, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Use integración para hallar las probabilidades $P(0 \leq X \leq 4)$, $P(2 \leq X \leq 3)$ y $P(X \geq 1)$.

---

15. A continuación $f(x)$ es una función de densidad de probabilidad para una variable aleatoria X.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{32}(4x - x^2) & \text{si } 0 \leq x \leq 4, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Use integración para hallar las probabilidades $P(0 \leq X \leq 4)$, $P(1 \leq X \leq 2)$ y $P(X \leq 1)$.

---

16. A continuación $f(x)$ es una función de densidad de probabilidad para una variable aleatoria X.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x^4} & \text{si } x \geq 1, \\ 0 & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

Use integración para hallar las probabilidades $P(1 \leq X < \infty)$, $P(1 \leq X \leq 2)$ y $P(X \geq 2)$.

---

17. A continuación $f(x)$ es una función de densidad de probabilidad para una variable aleatoria X.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}e^{-x/10} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Use integración para hallar las probabilidades $P(0 \leq X < \infty)$, $P(X \leq 2)$ y $P(X \geq 5)$.

---

18. A continuación $f(x)$ es una función de densidad de probabilidad para una variable aleatoria X.

$$f(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Use integración para hallar las probabilidades $P(X \geq 0)$, $P(1 \leq X \leq 2)$ y $P(X \leq 2)$.

---

19. A continuación $f(x)$ es una función de densidad de probabilidad para una variable aleatoria X.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}xe^{-x/2} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Use integración para hallar las probabilidades $P(0 \leq X < \infty)$, $P(2 \leq X \leq 4)$ y $P(X \geq 6)$.

---

20. En una parada de autobús, el tiempo X (en minutos) que una persona que llega de manera aleatoria debe esperar por el autobús se distribuye de manera uniforme con una función de densidad $f(x) = \frac{1}{10}$, donde $0 \leq x \leq 10$ y $f(x) = 0$ en otro caso. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona deba esperar cuando mucho siete minutos? ¿Cuál es el tiempo promedio que debe esperar una persona?

---

21. Un dispensador automático de refrescos en un restaurante de comida rápida sirve X onzas de bebida de cola en un recipiente de 12 onzas. Si X se distribuye uniformemente en el intervalo $[11.92, 12.08]$, ¿cuál es la probabilidad de que se sirvan menos de 12 onzas? ¿Cuál es la probabilidad de que se sirvan exactamente 12 onzas? ¿Cuál es la cantidad promedio servida?

---

22. En un hospital particular, la longitud de tiempo X (en horas) entre llegadas sucesivas a la sala de emergencias se distribuye de manera exponencial con $k = 3$. ¿Cuál es la probabilidad de que pase más de una hora sin ninguna llegada?

---

23. La vida útil X (en años) de un componente de computadora tiene una distribución exponencial con $k = \frac{2}{5}$. ¿Cuál es la probabilidad de que dicho componente falle en el transcurso de tres años de uso? ¿Cuál es la probabilidad de que dure más de cinco años?

---

24. La vida útil X de una clase particular de máquina es una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{28} + \frac{3}{x^2} & \text{si } 3 \leq x \leq 7, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde x es el número de años que una máquina seleccionada al azar permanece en uso.

a) Encuentre la probabilidad de que una máquina seleccionada al azar sea útil durante más de 4 años.

b) Halle la probabilidad de que una máquina seleccionada al azar sea útil durante al menos 5 años.

c) Encuentre la probabilidad de que una máquina seleccionada al azar sea útil entre 4 y 6 años.

---

25. Cierto semáforo permanece en rojo durante 45 segundos. Usted llega (al azar) al semáforo y lo encuentra en rojo. Use una función de densidad uniforme apropiada para hallar:

a) La probabilidad de que el semáforo cambie a verde antes de 15 segundos.

b) La probabilidad de que el semáforo cambie a verde entre 5 y 10 segundos después que usted llegue.

---

26. Durante las horas "pico" de la mañana, los trenes suburbanos pasan cada 20 minutos por la estación cercana a su casa, en el centro de la ciudad. Usted llega (al azar) a la estación y no encuentra tren en la plataforma. Suponiendo que los trenes están pasando según su itinerario, use una función de densidad uniforme apropiada para hallar:

a) La probabilidad de que tendrá que esperar el tren al menos 8 minutos.

b) La probabilidad de que tendrá que esperar el tren entre 2 y 5 minutos.

---

27. La vida útil de las bombillas eléctricas manufacturadas por cierta compañía es medida por una variable aleatoria X, con función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}01e^{-0{,}01x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

donde x denota la vida útil (en horas) de una bombilla seleccionada al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la vida útil de una bombilla seleccionada al azar sea entre 50 y 60 horas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la vida útil de una bombilla seleccionada al azar no sea mayor a 60 horas?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la vida útil de una bombilla seleccionada al azar sea mayor a 60 horas?

---

28. La vida útil de un tipo particular de impresora es medida por una variable aleatoria X con función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}02e^{-0{,}02x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

donde x denota el número de meses que una impresora seleccionada al azar ha estado en uso.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una impresora seleccionada al azar dure entre 10 y 15 meses?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una impresora seleccionada al azar dure menos de 8 meses?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que una impresora seleccionada al azar dure más de 1 año?

---

29. Suponga que el tiempo X que un cliente debe pasar en una fila de espera en cierto banco es una variable aleatoria que está exponencialmente distribuida, con función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}e^{-x/4} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

donde x es el número de minutos que un cliente seleccionado al azar pasa en una fila de espera.

a) Encuentre la probabilidad de que un cliente tenga que estar de pie en la fila al menos 8 minutos.

b) Encuentre la probabilidad de que un cliente tenga que estar de pie en la fila entre 1 y 5 minutos.

---

30. Sea X una variable aleatoria que mide la edad de una célula seleccionada al azar en una población particular. Suponga que X está distribuida exponencialmente con una función de densidad de probabilidad de la forma

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-kx} & \text{para } x \geq 0, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde x es la edad de una célula seleccionada al azar (en días) y k es una constante positiva. Experimentos indican que es doblemente probable que una célula tenga menos de 3 días de edad, a que tenga más de 3 días de edad.

a) Use esta información para determinar k.

b) Encuentre la probabilidad de que una célula seleccionada al azar tenga al menos 5 días de edad.

Referencias

[1] E. F. Haeussler, R. S. Paul, and R. J. Wood. *Matemáticas para administración y economía.* Pearson, décimo tercera edición, 2015.

[2] L. Hoffmann, G. Bradley, and K. H. Rosen. *Cálculo aplicado para administración, economía y ciencias sociales.* McGraw-Hill Interamericana, octava edición, 2006.