Taller de preparación para el segundo parcial de Cálculo 1.

1. Calcular los siguientes límites

   (a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$........................... Respuesta 6

   (b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+3x-4}{x^2-1}$.....................Respuestas $\dfrac{5}{2}$

   (c) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-10x+25}{x^2-2x-15}$................ Respuesta 0

   (d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-x-2}{x^2+4}$...................... Respuesta 0

   (e) $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{x^2+2x+1}$................. Respuesta 3

   (f) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{2x+3}}{x+3}$......................... Respuesta $\dfrac{3}{2}$

   (g) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x^2+4x+4}$.................... Respuesta $\dfrac{\sqrt{2}}{8}$

   (h) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2+2x-5}{2x^2-x-1}$.................. Respuesta $\dfrac{8}{3}$

   (i) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{5x^2-7x-6}{x^3-4x}$................... Respuesta $\dfrac{13}{8}$

   (j) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x^2-5x-3}{x^3-27}$................... Respuesta $\dfrac{7}{27}$

   (k) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{7x^2-10x-8}$....................Respuesta $\dfrac{2}{3}$

   (l) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x^3-1}$..................... Respuesta 0

2. Calcular los siguientes límites utilizando racionalización.

   (a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$........................ Respuesta 4

   (b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$........................Respuesta $\dfrac{2}{3}$

   (c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{\sqrt{10-x}-3}$....................... Respuesta -3

   (d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$........................ Respuesta 6

   (e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$...............................Respuesta $\dfrac{1}{3}$

   (f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x^3-1}$........................ Respuesta $-\dfrac{23}{72}\sqrt[3]{8}+\dfrac{2}{3}$

3. Calcular los siguientes límites

   (a) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{4}{x-1}$........................ Respuesta ∞

   (b) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{5x}{x-2}$........................ Respuesta $-\infty$

   (c) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{4x}{x^2-1}$....................... Respuesta ∞

   (d) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{4x}{x^2-2x+1}$.............. Respuesta ∞

   (e) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{4x}{2-2x}$....................... Respuesta $-\infty$

4. Calcular los siguientes límites.

   (a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+2x-5}{5x^2-3x-2}$..................... Respuesta $\dfrac{3}{5}$

   (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x-4}{4x^2+2x-6}$..................... Respuesta 0

   (c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^2-7x-6}{2x-4}$..................... Respuesta ∞

   (d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^3-4}{4x^2+2x-6}$..................... Respuesta ∞

   (e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8x^3-7x^2-6x-5}{4x^3-3x^2+5x-6}$........... Respuesta 2.

   (f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ .... Respuesta -1

   (g) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+5}-x\right)$ .... Respuesta ∞

   (h) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2-4x+3}+x\right)$ .... Respuesta 2

   (i) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-4x+3}+x\right)$ .... Respuesta ∞

5. Calcular los siguientes límites.

   (a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|x|}{x}$..................... Respuesta 1.

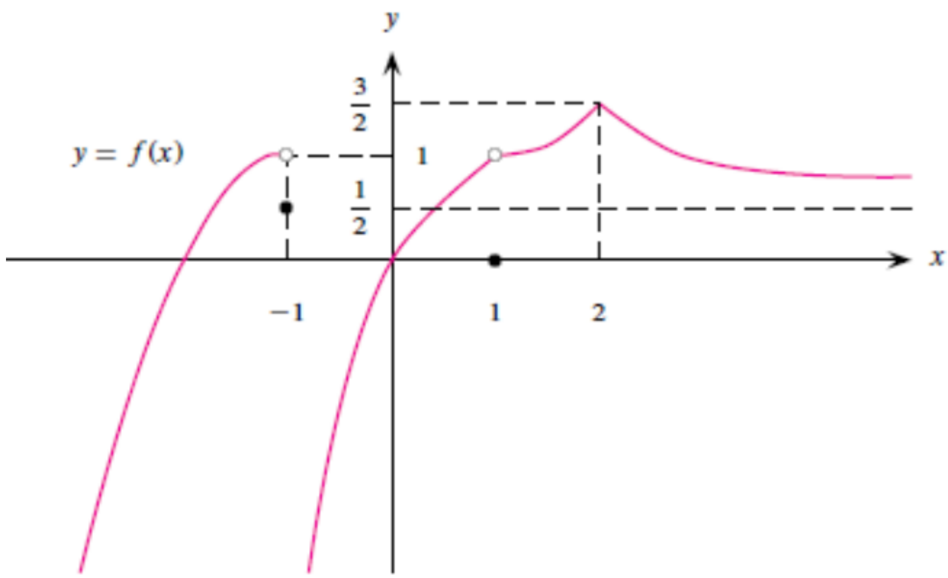
   (b) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x|}{x}$..................... Respuesta -1.

   (c) Explique con sus propias palabras lo que significa la ecuación $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 7$. ¿Es posible que esta afirmación siga siendo verdadera aún si $f(3) = 5$?

   (d) Explique lo que significa decir que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 7$ y que $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 3$, ¿es posible que exista el $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$?

   (e) Suponga que una función $f(x)$ esté definida para todos los valores reales x, excepto para $x = x_0$. ¿Qué puede decirse acerca de la existencia de $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$?

6. Para la función $f(x)$ cuya grafica se presenta en la figura establezca el valor solicitado en cada caso. Si éste no existe , explique por qué



(a) $\lim_{x \to -1^+} f(x)$

(b) $\lim_{x \to -1^-} f(x)$

(c) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$

(d) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$

(e) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$

(f) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$

(g) $f(-1)$

(h) $f(1)$

(i) $f(2)$

(j) $\lim_{x \to -1} f(x)$

(k) $\lim_{x \to 1} f(x)$

(l) $\lim_{x \to 2} f(x)$

7. Sea $f(x) = [|x|]$ la función parte entera de x.¿Para qué valores de a no existe $\lim_{x \to a} [|x|]$?

8. Para cada uno de los siguientes casos calcule el $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

(a) $f(x) = 2x^2$

(b) $f(x) = 2x + 3$

(c) $f(x) = 4$

(d) $f(x) = 4x^3$

(e) $f(x) = \sqrt{2x}$

(f) $f(x) = \dfrac{-1}{x}$

9. Calcular los siguientes límites trigométricos

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{2x}$........................ Respuesta $\frac{3}{2}$.

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{4+\cos x}$.......................Respuesta 0.

(c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sin(x-3)}{2x-6}$.....................Respuesta $\frac{1}{2}$.

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{3x}$.............................Respuesta $\frac{1}{3}$.

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(2x)}{\sin(2x)}$........................Respuesta 1.

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \tan x}{1-\cos x}$.................Respuesta 0.

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}$.......................Respuesta 0.

(h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^3 x}{4x^2}$......................Respuesta $\frac{3}{8}$.

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan^2(4x)}{1-\cos(5x)}$....................Respuesta $\frac{32}{25}$.

(j) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1-\tan x}{\cos x - \sin x}$.................Respuesta $\sqrt{2}$.

(k) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$..........................Respuesta -1.

(l) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x}{x-\frac{\pi}{2}}$......................Respuesta 0

(m) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1+\sin(3x)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}$...................Respuesta $\frac{9}{2}$

(n) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$......................Respuesta $\cos x$

(o) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$....................Respuesta $-\sin x$

10. Usar el teorema del sandwich o del emparedado para demostrar que

(a) $\lim\limits_{x\to 0} x^2\cos(20\pi x) = 0$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) = 0$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} x^4\cos\left(\frac{2}{x}\right) = 0$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}e^{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)} = 0$

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2+1} = 0$

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \left|x\sin\left(\frac{1}{2x}\right)\right| = 0$

(g) $\lim\limits_{x\to 0} x^3\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0$

(h) $\lim\limits_{x\to 3} g(x) = -4$,
si $|g(x)+4| \leq 2(x-3)$.

11. Halle las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas de cada curva (si es que estas existen). Posteriormente utilizando un software o inteligencia artificial haga la gráfica y verifique sus respuestas.

   (a) $y = \dfrac{2x^2 + x + 1}{x^2 + x - 2}$

   (b) $y = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

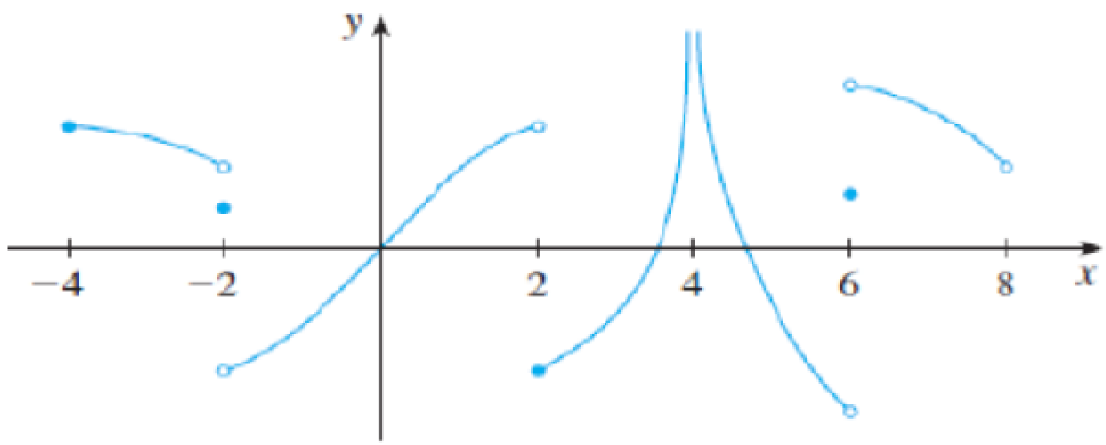
   (c) $y = \dfrac{x^3 - x}{x^2 - 6x + 5}$

   (d) $y = \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 5}$

   (e) $y = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^3 - 4x}$

   (f) $y = \sqrt{x^2 - 4}$

12. A partir de la gráfica de g determine los intervalos sobre los que g es continua. ¿En qué puntos g tiene discontinuidades?



13. Dibuje una función que tenga una discontinuidad de salto en $x = 2$ y una discontinuidad removible en $x = 4$ y que sea continua en todas las demás partes.

14. Explique por qué la función es discontinua en el punto a dado. Dibuje la gráfica de la función

   (a) $f(x) = \ln|x - 2|, \qquad a = 2$

   (b)

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & si \quad x < 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \\ 1 - x^2 & si \quad x > 0 \end{cases}, \qquad a = 0$$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 5x - 3}{x - 3} & si \quad x \neq 3 \\ 6 & si \quad x = 3 \end{cases}, \qquad a = 3$$

(d)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x + 2} & si \quad x \neq -2 \\ 1 & si \quad x = -2 \end{cases}, \qquad a = -2$$

15. ¿Para qué valor de la constante c la función f es continua en $(-\infty, \infty)$?

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 + 2x & si \quad x < 2 \\ x^2 - cx & si \quad x \geq 2 \end{cases}$$

16. ¿Para qué valor de la constante a y b la función f es continua en $(-\infty, \infty)$?

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & si \quad x < 2 \\ ax^2 - bx + 3 & si \quad 2 \leq x < 3 \\ 2x - a + b & si \quad x \geq 3 \end{cases}$$

17. ¿Para qué valor de la constante a y b la función f es continua en $(-\infty, \infty)$?

$$f(x) = \begin{cases} 3ax^3 - 2b & si \quad x \leq -1 \\ 2x - 4b & si \quad -1 < x \leq 1 \\ ax^2 + 3 & si \quad x > 1 \end{cases}$$

18. ¿Para qué valor de la constante a y b la función f es continua en $(-\infty, \infty)$?

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 6a & si \quad x < -3 \\ 3ax - 7b & si \quad -3 \leq x \leq 3 \\ x - 12b & si \quad x > 3 \end{cases}$$

19. Determine si la función f tiene una discontinuidad removible en a. En caso afirmativo redefina la función de tal forma que la función resultante sea continua en a

(a)

$$f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}, \qquad a = 4$$

(b)

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \qquad a = 0$$

(c)

$$f(x) = \frac{|x|}{x}, \qquad a = 0$$

(d)

$$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right), \qquad a = 0$$