Universidad del Norte
Facultad de Ciencias Básicas
Departamento de Matemáticas
Taller de Cálculo II
Primer Parcial
Profesor Coordinador: Javier de la Cruz
Periodo 10 de 2021

Nombre: ______________________ **Fecha:** ____________

Observación: Recuerde que los ejercicios impares del texto guía (Dennis G. Zill, Warren S. Wrigth, Joel Ibarra, Matemáticas 2, Cálculo integral) tienen **respuesta.**

Integral de funciones algebraicas

1. Calcule la integral indefinida, usando si es necesario una sustitución.

(a) $\int \frac{x^2+2x}{\sqrt{x^3+3x^2+1}}dx$

(b) $\int x(x^2+1)\sqrt{4-2x^2-x^4}dx$

(c) $\int \frac{x^3}{(x^2+4)^{3/2}}dx$

(d) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-2x^2}}dx$

(e) $\int x\sqrt{x+6}dx$

(f) $\int x^2\sqrt{1-x}dx$

(g) $\int \frac{x^2-1}{\sqrt{2x-1}}dx$

(h) $\int \frac{2x+1}{\sqrt{x+4}}dx$

(i) $\int \frac{x}{(x+1)-\sqrt{x+1}}dx$

(j) $\int x\sqrt[3]{x+4}dx$

(k) $\int \frac{x+2}{\sqrt{x-1}}dx$

(l) $\int x^2\sqrt{3-2x}dx$

(m) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x-2}}dx$

(n) $\int \frac{1}{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{3x}}dx$

(o) $\int \frac{dx}{x-x^{1/3}}dx$

(p) $\int (x+\frac{1}{x})^{3/2}(\frac{x^2-1}{x^2})dx$

(q) $\int \frac{(x+1)^2}{(\frac{x^3}{3}+x^2+x+5)^4}dx$

(r) $\int (x^2+1)^{-3/2}dx$

(s) $\int \frac{x}{\sqrt{\sqrt{(1+x^2)^3}+x^2+1}}dx$

(t) $\int \frac{(x^2+1-2x)^{2/5}}{1-x}dx$

(u) $\int \frac{x}{(x+1)-\sqrt{x+1}}dx$

(v) $\int \frac{x-1}{x-\sqrt{x}}dx$

(w) $\int \sqrt{1+\frac{1}{4}(x^3-\frac{1}{x^3})^2}dx$

(x) $\int \sqrt{1+\frac{1}{4}(x^2-\frac{1}{x^2})^2}dx$

(y) $\int \sqrt{1+4x^2(x^2+1)}dx$

2. Una piedra es lanzada verticalmente hacia arriba desde el suelo con una velocidad inicial de 128 pies por segundo. Si la única fuerza que se considera

es la atribuida a la aceleración de la gravedad, determine (a) cuánto tiempo tardará la piedra en chocar contra el suelo; (b) la velocidad con la cual chocará contra el suelo; (c) a qué altura se elevará la piedra en su ascenso.

3. Una pelota se deja caer desde la cúspide de una torre de 555 pies de altura. a) ¿Cuánto tiempo tomará a la pelota llegar al suelo? b) ¿A qué velocidad chocará la pelota con el suelo?

4. Una mujer que se encuentra en un globo deja caer sus binoculares cuando el globo está a 150 pies de altura sobre el suelo y se eleva a razón de 10 pies por segundo. a) ¿Cuánto tiempo tardarán los binoculares en llegar al suelo? b) ¿Cuál es la velocidad de los binoculares al momento del impacto?

5. Una pelota se deja caer desde una ventana a 80 pies del suelo a una velocidad inicial de -64 pie/s a) ¿Cuándo choca contra el suelo la pelota? b) ¿Con qué velocidad golpeará el suelo?

6. Una piedra es lanzada verticalmente hacia arriba desde el techo de una casa que se encuentra a 60 pies del suelo con una velocidad inicial de 40 pie/s a) ¿En cuánto tiempo alcanzará la piedra su máxima altura? b) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza? c) ¿ Cuánto tiempo tomará a la piedra pasar por el nivel del techo de la casa en su trayectoria descendente? d) ¿ Cuál es la velocidad de la piedra en ese instante? e) ¿Cuánto tiempo tomará a la piedra golpear el suelo? f) ¿ Con qué velocidad golpeará el suelo?

Integral de funciones trigonométricas

7. Calcule la integral indefinida.

(a) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

(b) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$

(c) $\int \frac{\cos x}{\sin^{5/2} x}dx$

(d) $\int \frac{\csc^2 x}{\cot^3 x}dx$

(e) $\int \frac{\sin(\frac{1}{x})\cos(\frac{1}{x})}{x^2}dx$

(f) $\int \sec^2 x\sqrt{\tan x}dx$

(g) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

(h) $\int \sin x\sqrt{1-\cos x}dx$

(i) $\int \sin^3 x dx$

(j) $\int \cos^3(3x)dx$

(k) $\int \sin^3(x+\frac{1}{x})\cos(x+\frac{1}{x})(\frac{x^2-1}{x^2})dx$

(l) $\int \frac{\tan^3\sqrt{x}\sec^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

(m) $\int \frac{\sin^4(1+\sqrt{x})\cos(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx$

(n) $\int \frac{\sin(2x)}{\sqrt{3-2\sin^2 x}}dx$

(o) $\int \tan^2 x dx$

(p) $\int \cot^2 x dx$

(q) $\int [\tan(x/3)+\cot(x/3)]^2 dx$

8. Demuestre que

$$\int \frac{\cos^5 x}{\sqrt[3]{\sin x}} dx = \frac{3}{2} \sin^{2/3} x \left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{7}\sin^4 x\right) + c$$

Integrales que conducen a funciones trigonométricas inversas

9. Calcule la integral indefinida.

(a) $\int \frac{xdx}{\sqrt{3x-x^2-2}}$

(b) $\int \frac{(x+4)dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$

(c) $\int \frac{(2+x)dx}{\sqrt{4-2x-x^2}}$

(d) $\int \frac{2x^3dx}{2x^2-4x+3}$

(e) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$

(f) $\int \frac{dx}{(x+2)^2+9}$

(g) $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$

(h) $\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx$

(i) $\int \frac{dx}{3x^2-2x+5}$

(j) $\int \frac{3dx}{(x+3)\sqrt{x^2+6x+8}}$

(k) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{9x^2-18x+5}}$

(l) $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx$

10. Demuestre que $\int \frac{\arctan x}{x^2}dx = \ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{\arctan x}{x} + c$

Integral de funciones logarítmicas y exponenciales

11. Calcule la integral indefinida, haciendo si es necesario una sustitución.

(a) $\int \frac{1}{2x+7}dx$

(b) $\int \frac{\cos x}{2+\sin x}dx$

(c) $\int \frac{1}{x}\ln^3 x dx$

(d) $\int \frac{(1+\ln x)^2}{2x}dx$

(e) $\int \frac{2-3\sin 2x}{\cos 2x}dx$

(f) $\int \frac{2x^3}{x^2-4}dx$

(g) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-2x^2}}dx$

(h) $\int \frac{1}{x\ln x}dx$

(i) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}dx$

(j) $\int \frac{2\ln x+1}{x[\ln^2 x+\ln x]}dx$

(k) $\int \frac{2+\ln^2 x}{x[1-\ln x]}dx$

(l) $\int \frac{\tan(\ln x)}{x}dx$

(m) $\int 2^{x\ln x}(\ln x+1)dx$

(n) $\int \frac{\tan^2 2x}{\sec 2x}dx$

(o) $\int \frac{\sec^2 x}{\tan x}dx$

(p) $\int \frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\cos x}dx$

(q) $\int \frac{2-3\sin 2x}{\cos 2x}dx$

(r) $\int \frac{\sin 3x}{\cos 3x-1}dx$

(s) $\int(\tan 2x-\sec 2x)dx$

(t) $\int \frac{1}{\cos 4x}dx$

(u) $\int \frac{1}{2\sin(3x+1)}dx$

(v) $\int \frac{x^4-5x^2+3x-4}{x}dx$

(w) $\int \frac{x^4-5x^2+3x-4}{x+1}dx$

(x) $\int \frac{x^3}{x-2}dx$

(y) $\int \frac{3x^2-5x+1}{x-4}dx$

(z) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}dx$ Sug. hacer $x=z^6$.

12. En cierto cultivo, la tasa de reproducción de las bacterias es proporcional a la cantidad presente. Si hay 1.000 bacterias presentes inicialmente, y la cantidad se duplica a los 12 minutos, ¿cuánto tiempo deberá pasar antes de que haya 1.000.000 de bacterias presentes? Respuesta: 119,6 minutos.

13. La tasa de crecimiento de la población de una ciudad es proporcional a la población. Si la población en 1950 era de 50000 habitantes y en 1980 era de 75000 ¿cuál será la población esperada en 2010? Respuesta: 112,500

14. La rápidez de desintegración del elemento químico radio es proporcional a la cantidad presente es cualquier tiempo. Si se tienen 60 mg de radio y su semivida es de 1690 años ¿qué cantidad de radio habrá dentro de 100 años a partir de hoy? Respuesta: 57,6

15. El número de bacterias en un cultivo se incrementó de acuerdo con la ley de crecimiento exponencial. Después de 2 horas se tienen 125 bacteraias y 350 despues de 4 horas. a) Encuentre la población inicial b) Cúantas bacterias hay de 8 horas c) ¿Después de cuántas horas habrá 25000 bacterias? Respuesta: a) 44,71 b) 2730,68

16. Una reacción química convierte un cierto compuesto en otro, siendo la razón de conversión del primer compuesto proporcional a la cantidad de éste presente en cualquier instante. Al cabo de una hora quedan 50 gramos del primer compuesto, mientras que al cabo de tres horas solamente quedan 25 gramos.

    (a) ¿Cuántos gramos del primer compuesto existían inicialmente?

    (b) Cuántos del primer compuesto quedarán al cabo de cinco horas?

    (c) ¿En cuántas horas quedarán solamente 2 gramos del primer compuesto?

17. Calcule la integral indefinida.

    (a) $\int e^{5x^2} x dx$

    (b) $\int \frac{e^{4/x}}{x^2} dx$

    (c) $\int \frac{1}{1+e^{-2x}} dx$

    (d) $\int \frac{(1+e^x)^2}{e^x} dx$

18. Texto guía Página 38 Ejercicios: 35, 37, 43.

Ejercicios variados de integrales indefinidas

19. Calcule la integral indefinida.

    (a) $\int \frac{x}{x^2+x+1} dx$

    (b) $\int \frac{x+3}{x^2+x+1} dx$

    (c) $\int \frac{2x+7}{x^2+2x+5} dx$

    (d) $\int \frac{x+1}{\sqrt{5-x^2-4x}} dx$

    (e) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-x} dx$

    (f) $\int \frac{2+x}{\sqrt{4-2x-x^2}} dx$

    (g) $\int \frac{2x^3}{2x^2-4x+3} dx$

    (h) $\int \sqrt{e^x - 3} dx$

    (i) $\int \frac{(\arctan x)^3}{1+x^2} dx$

Área bajo una curva

20. Dada la función $f(x)$ y el intervalo $I = [a, b]$ calcule usando una partición regular:

    - La suma $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$ con $c_i = a + i\Delta x$
    - El área de la región bajo la curva $f(x)$ por encima del eje x en dicho intervalo I.

    (a) $f(x) = x^2$, $I = [0, 2]$

    (b) $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $I = [1, 3]$

(c) $f(x) = x^2 + 1$, $I = [0, 2]$

(d) $f(x) = x^2 + 1$, $I = [1, 2]$

(e) $f(x) = x^2 + 2$, $I = [1, 3]$

(f) $f(x) = x^2 + x$, $I = [0, 2]$

(g) $f(x) = x^2 + x$, $I = [1, 2]$

(h) $f(x) = 4 - x^2$, $I = [0, 2]$

(i) $f(x) = 4 - x^2$, $I = [-2, 2]$

Integral definida

21. Utilice una partición regular para calcular la integral definida indicada.

    (a) $\int_1^2 x^2 dx$

    (b) $\int_1^2 (x^2 + 1) dx$

    (c) $\int_1^2 (x^2 + x) dx$

    (d) $\int_1^5 (x^2 - 1) dx$

    (e) $\int_0^4 (x^2 + x - 6) dx$

    (f) $\int_0^2 x^3 dx$

22. Texto guía Página 19 Ejercicios: 13, 15.

23. Dibujar la expresión representada por $\int_0^1 \arcsin x$ dx.

Teorema fundamental del cálculo

24. Calcule la integral definida, usando el Teorema Fundamental del Cálculo.

    (a) $\int_0^1 x\sqrt{1 - x^2} dx$, Respuesta: $\frac{1}{3}$

    (b) $\int_1^2 2x^2\sqrt{x^3 + 1} dx$

    (c) $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}} dx$, Respuesta: 2

    (d) $\int_1^9 \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} dx$, Respuesta: $\frac{1}{2}$

    (e) $\int_1^2 (x - 1)\sqrt{2 - x} dx$, Respuesta: $\frac{4}{15}$

    (f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\frac{2x}{3}) dx$, Respuesta: $\frac{3}{4}\sqrt{3}$

    (g) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (x + \cos x) dx$

    (h) $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}} dx$, Respuesta: 1

    (i) $\int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}} dx$, Respuesta: $\frac{16}{3}$

(j) $\int_{-2}^{5} |x-3| dx$, Respuesta: $-\frac{21}{2}$

(k) $\int_{-1}^{1} \sqrt{|x| - x} dx$

(l) $\int_{-3}^{3} \sqrt{3 + |x|} dx$

(m) $\int_{0}^{1} \sqrt{x}\sqrt{1 + x\sqrt{x}} dx$

(n) $\int_{0}^{1} \frac{x^3+1}{x+1} dx$, Respuesta: $\frac{5}{6}$

(o) $\int_{1}^{3} \sqrt{1 + (\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2x^3})^2} dx$, Respuesta: $\frac{92}{9}$

(p) $\int_{1}^{3} \sqrt{1 + \frac{1}{4}(x^2 - \frac{1}{x^2})^2} dx$, Respuesta: $\frac{14}{3}$

(q) $\int_{0}^{1} \sqrt{1 + 4x^2(x^2+1)} dx$, Respuesta: $\frac{5}{3}$

25. Demuestre que $\int_{o}^{1} \frac{4}{1+x^2} dx = \pi$.

26. Usando el teorema fundamental del cálculo calcule el área de la región en el primer cuadrante limitada por la curva $y = \frac{1}{1+x^2}$, el eje x y la recta $x = 1$. **Respuesta**: $\pi/4$.

27. Usando el teorema fundamental del cálculo calcule el area bajo la curva $f(x) = x^2 + 1$, por encima del eje x y entre las rectas $x = 1$ y $x = 4$.

28. Usando el teorema fundamental del cálculo calcule el área de región limitada por la curva $y = \frac{8}{x^2+4}$ el eje x, el eje y y la recta $x = 2$.

29. Calcule las siguientes derivadas.

(a) $\frac{d}{dx}\int_{0}^{x} \sqrt{4 + t^6} dt$

(b) $\frac{d}{dx}\int_{x}^{3} \sqrt{\sin t} dt$

(c) $\frac{d}{dx}\int_{-x}^{x} \frac{2}{3+t^2} dt$

(d) $\frac{d}{dx}\int_{2}^{\tan x} \frac{1}{1+t^2} dt$

30. Texto guía Página 47 Ejercicios: 45, 47.

Tabla de integrales

1. $\int dx = x + c$
2. $\int a dx = ax + c$, donde a es una constante.
3. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
4. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$, donde $n \neq -1$
5. $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + c$
6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$, *donde* $a > 0$ y $a \neq 1$
7. $\int e^x dx = e^x + c$
8. $\int \sin x dx = -\cos x + c$
9. $\int \cos x dx = \sin x + c$
10. $\int \sec^2 x dx = \tan x + c$
11. $\int \csc^2 x dx = -\cot x + c$
12. $\int \sec x \tan x dx = \sec x + c$
13. $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + c$
14. $\int \tan x dx = \ln |\sec x| + c$
15. $\int \cot x dx = \ln |\sin x| + c$
16. $\int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| + c$
17. $\int \csc x dx = \ln |\csc x - \cot x| + c$
18. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$, donde $a > 0$
19. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c$, donde $a \neq 0$
20. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \mathrm{arcsec} \frac{x}{a} + c$, donde $a > 0$

Identidades trigométricas usadas

(a) $\mathrm{sen}^2 x + \cos^2 = 1$

(b) $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

(c) $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

(d) $\frac{\mathrm{sen} x}{\cos x} = \tan x$

(e) $\frac{\cos x}{\mathrm{sen} x} = \cot x$

(f) $\frac{1}{\mathrm{sen} x} = \csc x$

(g) $\frac{1}{\cos x} = \sec x$

(h) $\frac{1}{\tan x} = \cot x$

(i) $\mathrm{sen}(2x) = 2\mathrm{sen} \cos x$

(j) $\cos(2x) = 1 - 2\mathrm{sen}^2 x$

(k) $\mathrm{sen}^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$

(l) $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$