1 Potenciación

Sea $a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$, la expresión a^n define un número real asi: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ veces}$, El número real a recibe el nombre de base, n el de exponente y el resultado del producto es la potencia de orden n de a.

Ejemplo 1

	base	*exponente*	*expansión*	*potencia*
$\left(\frac{3}{5}\right)^3$	$\frac{3}{5}$	3	$\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5}$	$\frac{27}{125}$
8^4	8	4	$8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8$	4096
$\left(\frac{-\pi}{7}\right)^2$	$\frac{-\pi}{7}$	2	$\frac{-\pi}{7} \cdot \frac{-\pi}{7}$	$\frac{\pi^2}{49}$

Si el exponente es un número entero $m \leq 0$ la expresión a^m se define así:

$$a^m = \begin{cases} 1, \text{ si } m = 0 \\ \left(a^{-1}\right)^{-m}, \text{si } m < 0 \end{cases} \quad \text{donde } a^{-1} \text{ es el inverso multiplicativo de } a$$

Ejemplo 2 $\left(\frac{4}{9}\right)^0 = 1, \left(\frac{-4}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{-5}{4}\right)^{-(-3)} = \left(\frac{-5}{4}\right)^3.$

1.1 Propiedades de la potenciación

Como consecuencia de la definición, se tienen las siguientes propiedades. a y b representan números reales y n y m enteros

P.1 Al multiplicar potencias de igual base, se escribe la misma base y se suman los exponentes: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

P.2 Al dividir potencias de igual base, se escribe la misma base y se restan los exponentes: $a^m \div a^n = a^{m-n}$

P.3 La potenciación es distributiva con respecto a la multiplicación $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

P.4 La potenciación es distributiva con respecto a la división $(a \div b)^n = a^n \div b^n$

P.5 Potencia de una potencia, se escribe la misma base y se multiplican los exponentes $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

1.2 Radicación

Si $a \in \mathbb{R},\ m \in \mathbb{N},\ m \geq 2$ la expresión raiz de orden m de a o también raiz $m-$ésima de a, representada mediante el símbolo $\sqrt[m]{a}$,es otro número real c que cumple la condición que $c^m = a$.

$$\sqrt[m]{a} = c \Longleftrightarrow c^m = a, c \in \mathbb{R}$$

Obsérvese que se exije que c sea un número real, por tanto no tendrá sentido preguntarse por expresiones de la forma $\sqrt[4]{-81}$, $\sqrt{-9}$, $\sqrt[6]{\frac{-1}{64}}$ porque en niguno de los casos es posible encontrar un número real c para el cual $c^4 = -81$, $c^2 = -9$, $c^6 = \frac{-1}{64}$.

En cambio si existen, por ejemplo, $\sqrt[3]{-11} \approx -2.2240$, $\sqrt[5]{-32} = -2$.

Una vez se ha definido la radicación es posible definir a^m con $a \in \mathbb{R}$ y $m \in \mathbb{Q}$, en efecto, si $m = \frac{p}{q}$, donde tanto p como q son enteros y $q \neq 0$, se define $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$

Ejemplo 3 $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$, $\sqrt{4^5} = 4^{\frac{5}{2}}$, $\left(\frac{-2}{7}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{-2}{7}}$.

Las propiedades de la potenciación con exponentes enteros se conservan cuando los exponentes son números racionales.

Ejemplo 4

Los siguientes son ejemplos relativos a la simplificación de expresiones con exponentes enteros o racionales.

1. $\dfrac{17^{-1}}{17^{-5}} = 17^{-1-(-5)} = 17^{-1+5} = 17^4$

2. $\left(2 \times 5^{-3}\right)^{-2} = \left(2 \times \dfrac{1}{5^3}\right)^{-2} = \left(\dfrac{2}{5^3}\right)^{-2} = \left(\dfrac{5^3}{2}\right)^{2} = \dfrac{5^6}{2^2}$

3. $\dfrac{5^{-1}u^{-3}v^3w^{-4}}{3^2v^{-4}w} = \dfrac{v^{3-(-4)}w^{-4-1}}{5 \times 3^2u^3} = \dfrac{v^7w^{-5}}{5 \times 3^2u^3} = \dfrac{v^7}{5 \times 3^2u^3w^5} = \dfrac{v^7}{45u^3w^5}$

4. $\left(7x^{-2} - y^{-2}\right)^{-2} = \left(\dfrac{7}{x^2} - \dfrac{1}{y^2}\right)^{-2} = \left(\dfrac{7y^2 - 1x^2}{x^2y^2}\right)^{-2} = \left(\dfrac{x^2y^2}{7y^2 - x^2}\right)^{2} =$
$\dfrac{x^4y^4}{\left(7y^2 - x^2\right)^2} = \dfrac{x^4y^4}{\left(7y^2\right)^2 - 2 \times 7y^2x^2 + \left(x^2\right)^2} = \dfrac{x^4y^4}{49y^4 - 14y^2x^2 + x^4}$

5. $\left[\dfrac{8x^3y^{-\frac{4}{3}}}{27x^{-6}y}\right]^{-\frac{2}{3}} = \left[\dfrac{2^3x^3y^{-\frac{4}{3}}}{3^3x^{-6}y}\right]^{-\frac{2}{3}} = \left[\dfrac{3^3x^{-6}y}{2^3x^3y^{-\frac{4}{3}}}\right]^{\frac{2}{3}} = \dfrac{\left(3^3\right)^{\frac{2}{3}}\left(x^{-6}\right)^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}}{\left(2^3\right)^{\frac{2}{3}}\left(x^3\right)^{\frac{2}{3}}\left(y^{-\frac{4}{3}}\right)^{\frac{2}{3}}} =$
$\dfrac{3^2x^{-4}y^{\frac{2}{3}}}{2^2x^2y^{-\frac{8}{9}}} = \dfrac{3^2y^{\frac{8}{9}}y^{\frac{2}{3}}}{2^2x^4x^2} = \dfrac{9y^{\frac{8}{9}+\frac{2}{3}}}{4x^{4+2}} = \dfrac{9y^{\frac{14}{9}}}{4x^6}$

6. $\left(625a^4b^8\right)^{-\frac{1}{4}}\left(243a^{-10}b^5\right)^{\frac{1}{5}} =$

$$\begin{aligned}
\left(5^4a^4b^8\right)^{-\frac{1}{4}}\left(3^5a^{-10}b^5\right)^{\frac{1}{5}} &= \\
\frac{\left(3^5a^{-10}b^5\right)^{\frac{1}{5}}}{\left(5^4a^4b^8\right)^{\frac{1}{4}}} &= \frac{\left(3^5\right)^{\frac{1}{5}}\left(a^{-10}\right)^{\frac{1}{5}}\left(b^5\right)^{\frac{1}{5}}}{\left(5^4\right)^{\frac{1}{4}}\left(a^4\right)^{\frac{1}{4}}\left(b^8\right)^{\frac{1}{4}}} = \\
&= \frac{3a^{-2}b}{5ab^2} = \frac{3}{5aa^2b^2b^{-1}} = \frac{3}{5a^3b}
\end{aligned}$$

7. $\left(\frac{a^3b^2}{c^3}\right)^2 \div \left(\frac{b}{a^2c^4}\right)^3 \quad =$

$$\begin{aligned} &= \frac{a^6b^4}{c^6} \div \frac{b^3}{a^6c^{12}} = \frac{a^6b^4}{c^6} \cdot \frac{a^6c^{12}}{b^3} = \\ &= a^{6+6}b^{4-3}c^{12-6} = a^{12}bc^6 \end{aligned}$$

8. $-3\left(x+2\right)\left(x-1\right)^{-4} + \left(x-1\right)^{-3} \quad =$

$$\begin{aligned} &= \frac{-3\left(x+2\right)}{\left(x-1\right)^4} + \frac{1}{\left(x-1\right)^3} = \frac{-3\left(x+2\right)+1\left(x-1\right)}{\left(x-1\right)^4} = \\ &= \frac{-3x-6+x-1}{\left(x-1\right)^4} = \frac{-2x-7}{\left(x-1\right)^4} \end{aligned}$$

9. $\sqrt[3]{a^2}\sqrt{a^{-1}} =$

$$= a^{\frac{2}{3}}a^{\frac{-1}{2}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{-1}{2}} = a^{\frac{2\cdot 2-1\cdot 3}{6}} = a^{\frac{4-3}{6}} = a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}$$

10. $\dfrac{\sqrt[4]{32x^2y^{-3}}}{\sqrt[3]{54x^{-1}y^5}} =$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sqrt[4]{2^5x^2y^{-3}}}{\sqrt[3]{2\cdot 3^3x^{-1}y^5}} = \frac{\left(2^5x^2y^{-3}\right)^{\frac{1}{4}}}{\left(2\cdot 3^3x^{-1}y^5\right)^{\frac{1}{3}}} = \frac{2^{\frac{5}{4}}x^{\frac{2}{4}}y^{\frac{-3}{4}}}{2^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{3}{3}}x^{\frac{-1}{3}}y^{\frac{5}{3}}} = \\ &= \frac{2^{\frac{5}{4}-\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{2}-\frac{-1}{3}}y^{\frac{-3}{4}-\frac{5}{3}}}{3^{\frac{3}{3}}} = \frac{2^{\frac{15-4}{12}}x^{\frac{3+2}{6}}y^{\frac{-9-20}{12}}}{3} = \frac{2^{\frac{11}{12}}x^{\frac{5}{6}}y^{\frac{-29}{12}}}{3} = \\ &= \frac{2^{\frac{11}{12}}x^{\frac{10}{12}}}{3y^{\frac{29}{12}}} = \frac{2^{\frac{11}{12}}x^{\frac{10}{12}}}{3y^{\frac{24+5}{12}}} = \frac{2^{\frac{11}{12}}x^{\frac{10}{12}}}{3y^2y^{\frac{5}{12}}} = \frac{1}{3y^2}\sqrt[12]{\frac{2^{11}x^{10}}{y^5}} \end{aligned}$$

11. $\sqrt{2}+\sqrt{50}-\sqrt{72} =$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{2}+\sqrt{2\cdot 5^2}-\sqrt{2^3\cdot 3^2} = \sqrt{2}+5\sqrt{2}-2\cdot 3\sqrt{2} = \\ &= 6\sqrt{2}-6\sqrt{2} = 0 \end{aligned}$$

12. $\sqrt{3ab}-\sqrt[4]{9a^2b^2}+\sqrt[6]{27a^3b^3} =$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{3ab}-\sqrt[2\cdot 2]{3^2a^2b^2}+\sqrt[2\cdot 3]{3^3a^3b^3} = \\ &= \sqrt{3ab}-\sqrt[2]{3ab}+\sqrt[2]{3ab} = \sqrt{3ab} \end{aligned}$$

13. $1+\left(\sqrt{x}-\frac{1}{4\sqrt{x}}\right)^2$

$$\begin{aligned}
&= 1+\left(\sqrt{x}\right)^2-2\sqrt{x}\frac{1}{4\sqrt{x}}+\left(\frac{1}{4\sqrt{x}}\right)^2=\\
&= 1+x-\frac{1}{2}+\frac{1}{16x}=\frac{1}{2}+x+\frac{1}{16x}=\\
&= \frac{8x+16x^2+1}{16x}=\frac{(4x)^2+2\cdot 4x\cdot 1+1}{16x}=\\
&= \frac{(4x+1)^2}{16x}
\end{aligned}$$

14. $\left(\sqrt{u}-\sqrt{v}\right)\left(u-\sqrt{uv}+v\right)$

$$\begin{aligned}
&= u\sqrt{u}-\sqrt{u^2v}+v\sqrt{u}-u\sqrt{v}+\sqrt{uv^2}-v\sqrt{v}=\\
&= u\sqrt{u}-u\sqrt{v}+v\sqrt{u}-u\sqrt{v}+v\sqrt{u}-v\sqrt{v}=\\
&= (u+v+v)\sqrt{u}-(u+u-v)\sqrt{v}=\\
&= (u+2v)\sqrt{u}-(2u-v)\sqrt{v}
\end{aligned}$$

15. $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)=$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{a^2}-\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{ab}-\sqrt{b^2}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}-\sqrt{bc}+\sqrt{c^2}=\\
&= a+2\sqrt{ac}-b+c
\end{aligned}$$

16. $\dfrac{6x^{\frac{3}{5}}y^{-\frac{1}{3}}}{2x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{1}{2}}}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{6x^{\frac{3}{5}-\frac{2}{5}}y^{-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}}{2}=3x^{\frac{1}{5}}y^{\frac{-2-3}{6}}=\\
&= 3x^{\frac{1}{5}}y^{\frac{-5}{6}}=\frac{3x^{\frac{1}{5}}}{y^{\frac{5}{6}}}=\frac{3x^{\frac{1}{5}}}{y^{\frac{5}{6}}}\frac{y^{\frac{1}{6}}}{y^{\frac{1}{6}}}=\\
&= \frac{3x^{\frac{1}{5}}y^{\frac{1}{6}}}{y^{\frac{5}{6}}y^{\frac{1}{6}}}=\frac{3x^{\frac{1}{5}}y^{\frac{1}{6}}}{y^{\frac{5}{6}+\frac{1}{6}}}=\frac{3x^{\frac{1}{5}}y^{\frac{1}{6}}}{y}
\end{aligned}$$

17. $\left(36x^{-2}y^{\frac{6}{7}}\right)^{-\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned}
&= \left(2^2\cdot 3^2x^{-2}y^{\frac{6}{7}}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(2^2\right)^{\frac{-1}{2}}\left(3^2\right)^{\frac{-1}{2}}\left(x^{-2}\right)^{\frac{-1}{2}}\left(y^{\frac{6}{7}}\right)^{\frac{-1}{2}}=\\
&= 2^{-1}3^{-1}xy^{\frac{-6}{14}}=\frac{x}{2\cdot 3y^{\frac{6}{14}}}=\frac{x}{6y^{\frac{3}{7}}}\frac{y^{\frac{4}{7}}}{y^{\frac{4}{7}}}=\frac{xy^{\frac{4}{7}}}{6y^{\frac{3+4}{7}}}=\frac{xy^{4/7}}{6y}
\end{aligned}$$

18. $\left(243^{-1}a^{5/3}b^{-5/7}\right)^{1/5}$

$$= \left(\left(3^5\right)^{-1}a^{5/3}b^{-5/7}\right)^{1/5} = \left(\left(3^5\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{5}}\left(a^{5/3}\right)^{\frac{1}{5}}\left(b^{-5/7}\right)^{1/5} =$$

$$= 3^{-1}a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{-1}{7}} = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{3b^{\frac{1}{7}}} = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{3b^{\frac{1}{7}}}\frac{b^{\frac{6}{7}}}{b^{\frac{6}{7}}} = \frac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{6}{7}}}{3b^{\frac{1}{7}+\frac{6}{7}}} = \frac{a^{1/3}b^{6/7}}{3b}$$

1. En cada una de las siguientes expresiones simplifique y exprese el resultado con exponentes positivos.

   (a) $\frac{5^{-1}}{5^{-3}}$

   (b) $\left(2^{-1}3^{-3}\right)^2$

   (c) $\dfrac{2^{-1}u^{-2}v^3w}{3^2u^0v^{-4}w^{-1}}$

   (d) $\dfrac{y^{-2}-2x^{-1}y^{-1}-3x^{-2}}{x^{-1}y^{-2}-3x^{-2}y^{-1}}$

   (e) $-6\left(3x+5\right)^{-7}(3)\left(2x+7\right)^4+\left(3x+5\right)^{-6}(4)\left(2x+7\right)^3(2)$

   (f) $\left(7x^{-2}-y^{-2}\right)^{-2}$

2. Simplificar las siguientes expresiones, las que contengan exponentes negativos deben ser expresadas con exponentes positivos, tampoco deben haber exponentes fraccionarios en el denominador.

   (a) $\sqrt{a+\dfrac{a}{a^2-1}}$

   (b) $\sqrt{\dfrac{3x}{8y^3}}$

   (c) $\sqrt{\dfrac{9x^{-2}y^7}{98x^{-6}y^{-3}}}$

   (d) $\left[\dfrac{8x^3y^{-\frac{4}{3}}}{27x^{-6}y}\right]^{-\frac{2}{3}}$

   (e) $\left(\dfrac{64x^{-1}y^6}{x^0y^{\frac{3}{2}}}\right)^{-\frac{1}{6}}$ R. $\dfrac{x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{4}}}{2y}$

   (f) $\left(625a^4b^8\right)^{-\frac{1}{4}}\left(243a^{-10}b^5\right)^{\frac{1}{5}}$ R. $\dfrac{3}{5a^3b}$

   (g) $\dfrac{1}{2}\left(4x+1\right)\left(5x+3\right)^{-\frac{1}{2}}(5)+4\left(5x+3\right)^{\frac{1}{2}}$ R. $\dfrac{60x+29}{2\left(5x+3\right)^{\frac{1}{2}}}$

2 Expresiones algebraicas y polinomios.

En la vida cotidiana se emplean expresiones como las siguientes: hay promoción, y hoy, este vestido cuesta la tercera parte de lo que costaba, Luisa gana el doble de lo que gana Pedro, es posible que este año se pierda el 70% de la producción agrícola debido al fuerte invierno.

Estas expresiones se pueden representar en forma simbólica mediante combinaciones de operaciones algebraícas (sumas o restas, multiplicaciones o divisiones, potenciación, radicación, ...) con símbolos, generalmente letras del alfabeto, que se emplean para representar situaciones cambiantes o variables. Por ejemplo, para representar el precio de un vestido se puede usar la letra p y la expresión *este vestido cuesta la tercera parte de lo que costaba* se puede simbolizar como $\frac{1}{3}p$. p representa el precio de cualquiera de los vestidos que se encuentran en promoción.

Los siguientes son ejemplos de expresiones algebraícas:

$$\begin{aligned} & -2m + 7j \\ 5x + 3 &= 0 \\ & \frac{l^2 - t}{\sqrt{d}} \\ \sqrt[3]{11s - 4a^2} &> 3 \end{aligned}$$

Con las expresiones algebraícas pueden hacerse operaciones en la misma forma a como se realizan operaciones con números reales.

Los siguientes son ejemplos ilustrativos

1. $3cs - 5cs + 13cs = 11cs$

2. $4(a + 5b) - 3(2a - 3b) = 4a + 20b - 6a + 9b = -2a + 29b$

3. $a(c - d) + b(d - c) - c(a - b) - (-a - b) = ac - ad + bd - bc - ca + cb + a + b = -ad + bd + a + b$

4. $\left(x^2 + m\right)\left(3x^3 - m\right) = 3x^5 - mx^2 + 3mx^3 - m^2$

5. $\dfrac{\sqrt{27a^5}}{12ab} = \dfrac{\sqrt{3^3a^5}}{2^2 \cdot 3ab} = \dfrac{\sqrt{3^2 \cdot 3a^2a^2a}}{2^2 \cdot 3ab} = \dfrac{3a \cdot a\sqrt{3a}}{2^2 \cdot 3ab} = \dfrac{a\sqrt{3a}}{2^2 \cdot b} = \dfrac{a\sqrt{3a}}{4b}$

Ejercicio 5 *Compruebe que si* $y = x + \frac{1}{x} \Longrightarrow y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$ *y* $y^3 - 3y = x^3 + \frac{1}{x^3}$

2.1 Polinomios

Un polinomio en una indeterminada o variable es una expresión algebraíca de la forma $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$ con la condición que $i \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, ...\}$ y cada uno de los a_i es un número que puede ser entero, racional o real. Cada uno de los a_i recibe el nombre de coeficiente, $a_i\ x^i$ es un término del polinomio y el mayor de los exponentes, recibe el nombre de grado del polinomio.

Puede ocurrir que en la expresión $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n$ cada uno de los a_i ,excepto posiblemente a_0 , sea igual a cero, en este caso se dice que se tiene un polinomio constante, en el caso que $a_0 = 0$ se tiene el polinomio nulo. $0, -5, 34, \pi, \sqrt{2}$, son 5 ejemplos de polinomios constantes. El grado de un polinomio constante es cero.

Ejemplo 6

polinomio	*grado*
x	1
$2x + 4$	1
$4x^5 - 2x^3 + 7x^2 - 4x + 6$	5
$-11x^8$	8

En un polinomio, la variable x, representa un número real que no está determinado.

Dos términos que tengan el mismo grado, se consideran semejantes, $-2x^6$ y $7x^6$ son semejantes.

2.1.1 Operaciones entre polinomios

Adición Si $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+...+a_nx^n$ y $b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+...+b_mx^m$ son polinomios, no es necesario que n y m sean iguales, esto es, los polinomios pueden tener grado diferente, se define la adición de polinomio como el polinomio $c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + ... + c_kx^k$ donde cada $c_i = a_i + b_i$ y el grado de este polinomio es el número mayor entre n y m.

Ejemplo 7

$$\left(4 + 2x - 5x^2 + 6x^3 - x^6\right) + \left(-1 - 2x + 8x^2 + x^4 - 2x^5\right) =$$

$$= (4 + (-1)) + (2 + (-2))\, x + (-5 + 8)\, x^2 + 6x^3 + x^4 - 2x^5 - x^6 =$$
$$= 3 + 3x^2 + 6x^3 + x^4 - 2x^5 - x^6$$

Multiplicación Si $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n$ y $b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + ... + b_mx^m$ son polinomios, no es necesario que n y m sean iguales, esto es, los polinomios pueden tener grado diferente, se define la multiplicación de polinomios como el polinomio $c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + ... + c_kx^k$ donde cada $c_i = a_0b_i + a_1b_{i-1} + a_2b_{i-2} + ... + a_ib_0$ y el grado de este polinomio es $n + m$.

Ejemplo 8

$$\begin{aligned} & \left(4 + 2x - 5x^2 + 6x^3 - x^6\right)\left(-1 - 2x + x^4\right) \\ = \quad & -4 - 10x + 1x^2 + 4x^3 - 8x^4 + 2x^5 - 4x^6 + 8x^7 - 4x^{10} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cc}
(4\cdot(-1)) & x^0 \\
(4\cdot(-2)+(2)\cdot(-1)) & x \\
(2\cdot(-2)+(-5)\cdot(-1)) & x^2 \\
((-5)\cdot(-2)+6\cdot(-1)) & x^3 \\
(4\cdot 1+6\,(-2)) & x^4 \\
(2\cdot 1) & x^5 \\
((-5)\cdot 1+(-1)\cdot(-1)) & x^6 \\
(6\cdot 1+(-1)\cdot(-2)) & x^7 \\
(0) & x^8 \\
(0) & x^9 \\
(-1\cdot 4) & x^{10}
\end{array}$$ es más cómodo realizar este procedimiento multiplicando cada uno de los términos de uno de los polinomios por cada uno de los términos del otro, esto puede hacerse gracias a la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición, al final se reducen los términos semejantes para obtener el resultado.

$$\begin{gathered}
-1\cdot\left(4+2x-5x^2+6x^3-x^6\right)=-4-2x+5x^2-6x^3+x^6 \\
-2x\left(4+2x-5x^2+6x^3-x^6\right)=-8x-4x^2+10x^3-12x^4+2x^7 \\
x^4\left(4+2x-5x^2+6x^3-x^6\right)=4x^4+2x^5-5x^6+6x^7-x^{10} \\
-4+(-2x-8x)+\left(5x^2-4x^2\right)+\left(-6x^3+10x^3\right)+\left(4x^4-12x^4\right)+ \\
+2x^5+\left(x^6-5x^6\right)+\left(2x^7+6x^7\right)-x^{10}= \\
=-4-10x+1x^2+4x^3-8x^4+2x^5-4x^6+8x^7-x^{10}
\end{gathered}$$

Ejercicio 9 *Calcular*

1. $(2x-3y)\,(3x+2y)$
2. $(3x-y+2z)^2$
3. $(5x-4)\,(5x+4)$
4. $(5x-4)^2$
5. $(5x+4)^2$
6. $\left(x^3-1\right)\left(x^3+1\right)$
7. $\left(x^3+1\right)^2$

División de polinomios Si $p\,(x)$ y $q\,(x)$ son polinomios, y el grado de $p\,(x)$

es mayor o igual que el grado de $q\,(x)$, siempre es posible expresar a $p\,(x) = c\,(x)\cdot q\,(x)+r\,(x)$ donde $c\,(x)$ y $r\,(x)$ son polinomios y el grado de $r\,(x)$ menor que el grado de $q\,(x)$.

El proceso que lo permite se conoce como algoritmo de la división.

1. Se ordenan, mediante el grado de cada término, en forma decreciente tanto el polinomio dividendo como el polinomio divisor. Es útil completar los términos faltantes con términos que tengan cero como coeficiente.

2. Se divide el coeficiente del primer término del dividendo por el coeficiente del primer término del divisor, este será el coeficiente del primer término del cociente, el grado de este término será la resta de los correspondientes exponentes. Recuerda que para dividir potencias de igual base se escribe la misma base y se restan los exponentes.

3. Se multiplica este primer término del cociente por el divisor y el resultado se resta del dividendo. El resultado de esta sustracción será el nuevo dividendo.

4. Se repite los pasos 3 y 4 con este dividendo

5. El proceso termina en el momento en que el grado del último dividendo sea menor que el del divisor.

Ejemplo 10 *Dividir* $4x^5+7-2x^3+x-x^2$ *entre* $x+1-3x^2$ *primero se ordenan los polinomios:*

$$\left(2x^5+0x^4-2x^3-x^2+x+3\right)\div\left(-3x^2+x+1\right)$$

$$\begin{array}{ll}
2x^5+0x^4-2x^3-x^2+x+3 & \lfloor\underline{-3x^2+x+1} \\
\underline{-2x^5+\frac{2}{3}x^4+\frac{2}{3}x^3\ldots\ldots\ldots\ldots} & -\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{9}x^2+\frac{4}{27}x+\frac{25}{9} \\
\qquad\frac{2}{3}x^4-\frac{2}{3}x^3-x^2+x+3 & \\
\qquad\underline{-\frac{2}{3}x^4+\frac{2}{9}x^3+\frac{2}{9}x^2} & \\
\qquad\qquad-\frac{4}{9}x^3-\frac{7}{9}x^2+x+3 & \\
\qquad\qquad\underline{\frac{4}{9}x^3-\frac{4}{27}x^2-\frac{4}{27}x} & \\
\qquad\qquad\qquad-\frac{25}{9}x^2+\frac{23}{27}x+3 & \\
\qquad\qquad\qquad\underline{\frac{25}{9}x^2-\frac{25}{9}x-\frac{25}{9}} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad-\frac{52}{27}x-\frac{16}{9} &
\end{array}$$

El cociente es:

$$-\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{9}x^2+\frac{4}{27}x+\frac{25}{9}$$

y el residuo:

$$-\frac{52}{27}x-\frac{16}{9}$$

por tanto

$$\begin{aligned}
& 2x^5+0x^4-2x^3-x^2+x+3 \\
= & \left(-3x^2+x+1\right)\left(-\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{9}x^2+\frac{4}{27}x+\frac{25}{9}\right)+\left(-\frac{52}{27}x-\frac{16}{9}\right)
\end{aligned}$$

Ejercicio 11 *Hallar el cociente y el residuo si* $6x^4+5x^3-x^2+14x+1$ *se divide por* $2x^2+3x-1$

Ejercicio 12 *Muestre que si* x^4-14x^2+1 *se divide por* x^2-4x+1 *el residuo es* 0

2.2 Factorización de polinomios

Si $p(x)$ es un polinomio y es posible encontrar $s(x)$ y $q(x)$, polinomios no constantes, para los cuales se cumple que $p(x) = s(x) \cdot q(x)$ se dice que el polinomio $p(x)$ se ha factorizado y que $s(x)$ y $q(x)$ son factores de $p(x)$.

No siempre es posible encontrar factores de un polinomio dado, saber cuándo esto es posible, requiere de algunos criterios que desbordan los objetivos de este curso, nos limitaremos a presentar algunos tipos de polinomios con coeficientes en $\mathbb{Z}$ o en $\mathbb{Q}$ que pueden ser factorizados sin dificultad y ejemplos de algunos que no son factorizables, un polinomio de la forma $ax^2 + b$ si tanto a como b son enteros positivos, no es factorizable, en particular un polinomio de la forma $x^2 + b^2$, llamado suma de cuadrados, nunca es factorizable, un polinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ no es factorizable en los reales si $b^2 - 4ac < 0$.

nombre	forma
factor común	$ba_0y + ba_1yx + ba_2yx^2 + ... + ba_nyx^n$
diferencia de cuadrados	$x^2 - a^2$
suma de cubos	$x^3 + a^3$
diferencia de cubos	$x^3 - a^3$
trinomios cuadráticos	$ax^2 + bx + c$
polinomio de grado $n \geq 3$	$a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$

la forma general de factorizar estos polinomios es :

nombre	factorización
factor común	$by\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n\right)$
diferencia de cuadrados	$(x - a)(x + a)$
suma de cubos	$(x + a)\left(x^2 - ax + a^2\right)$
diferencia de cubos	$(x - a)\left(x^2 + ax + a^2\right)$
trinomios cuadráticos	$\left(x - \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$
polinomio de grado $n \geq 3$	se estudiarán casos particulares

Ejemplo 13 $(x-1)(x+2) - (x-1)(2x-3)$ *hay un factor común* $x-1$, *se factoriza* $(x-1)[(x+2) - (2x-3)] = (x-1)(x+2-2x+3) = (x-1)(5-x)$

Ejemplo 14 $9t^2s^2 + 6ts^3 + 21t^3s^2 + 3ts^2$ *hay un factor común* $3ts^2$, *se factoriza* $3ts^2\left(3t + 2s + 7t^2 + 1\right)$

Ejemplo 15 $9x^2 - \frac{1}{4}$ *es una diferencia de cuadrados,* $9x^2$ *es el cuadrado de* $3x$ *y* $\frac{1}{4}$ *es el cuadrado de* $\frac{1}{2}$, *se factoriza* $\left(3x - \frac{1}{2}\right)\left(3x + \frac{1}{2}\right)$

Ejemplo 16 $x^4 - 16y^8$ *es una diferencia de cuadrados,* x^4 *es el cuadrado de* x^2 *y* $16y^8$ *es el cuadrado de* $4y^4$, *se factoriza* $\left(x^2 - 4y^4\right)\left(x^2 + 4y^4\right)$, $x^2 + 4y^4$ *no es factorizable por ser una suma de cuadrados, pero* $x^2 - 4y^4$ *es una diferencia de cuadrados y se puede factorizar como* $\left(x - 2y^2\right)\left(x + 2y^2\right)$, *en consecuencia, la factorización de* $x^4 - 16y^8$ *es* $\left(x - 2y^2\right)\left(x + 2y^2\right)\left(x^2 + 4y^4\right)$.

Ejemplo 17 $2(x-2y)^2 - 18z^2$, 2 *es un factor común* $2(x-2y)^2 - 18z^2 = 2\left[(x-2y)^2 - 9z^2\right]$ *la expresión* $(x-2y)^2 - 9z^2$ *es una diferencia de cuadra-*

dos, $x-2y$ *es el cuadrado de* $(x-2y)^2$ *y* $9z^2$ *es el cuadrado de* $3z$ *entonces* $2\left[(x-2y)^2-9z^2\right]=2\left[((x-2y)-3z)\left((x-2y)+3z\right)\right]=2\left[(x-2y-3z)(x-2y+3z)\right]$

Ejemplo 18 x^3-y^9 *es una diferencia de cubos,* x^3 *es el cubo de* x *y* y^3 *es el cubo de* y^9 *se factoriza* $\left(x-y^3\right)\left(x^2+xy^3+\left(y^3\right)^2\right)=\left(x-y^3\right)\left(x^2+xy^3+y^6\right)$

Ejemplo 19 $27x^3+512$ *es una suma de cubos,* $27x^3$ *es el cubo de* $3x$ *y* 512 *es el cubo de* 8*, luego* $27x^3+512=(3x+8)\left((3x)^2-8\cdot 3x+8^2\right)=(3x+8)\left(9x^2-24x+64\right)$

Ejemplo 20 $x^2-7x+12$ *es un trinomio de la forma* ax^2+bx+c *con* $a=1, b=-7$ *y* $c=12$*,entonces,*

Ejemplo 21 $(2x-y)^3-8$, 8 *es el cubo de* 3*, entonces*

$$\begin{aligned}
(2x-y)^3-8 &= (2x-y)^3-2^3= \\
&= ((2x-y)-2)\left((2x-y)^2+2\left(2x-y\right)+2^2\right) \\
&= (2x-y-2)\left((2x)^2+2\cdot 2xy+y^2-4x+2y+4\right) \\
&= (2x-y-2)\left(4x^2+4xy+y^2-4x+2y+4\right)
\end{aligned}$$

Ejemplo 22 $81x^9-256y^8x$*, obsérvese que* x *es factor de* $81x^9$ *y de* $256y^8x \Rightarrow$ $81x^9-256y^8x=x\left(81x^8-256y^8\right)=x\left(3^4x^8-2^8y^8\right)=x\left(\left(3^2x^4\right)^2-\left(2^4y^4\right)^2\right)=$ $x\left(3^2x^4-2^4y^4\right)\left(3^2x^4+2^4y^4\right)$*. Ahora,*$3^2x^4-2^4y^4$ *es a su vez una diferencia de cuadrados, que se factoriza:* $\left(3x^2-2^2y^2\right)\left(3x^2+2^2y^2\right)$*. Al ser* $3^2x^4+2^4y^4$ *una suma de cuadrados, no se factoriza. Luego la factorización de* $81x^9-256y^8x$ *es*

$$\begin{aligned}
& x\left(3x^2-2^2y^2\right)\left(3x^2+2^2y^2\right)\left(3^2x^4+2^4y^4\right) \\
=\ & x\left(3x^2-4y^2\right)\left(3x^2+4y^2\right)\left(9x^4+16y^4\right)
\end{aligned}$$

Ejemplo 23 $x^2-y^2-x-y=x^2-y^2-(x+y)=(x-y)(x+y)-1\cdot(x+y)=(x+y)((x-y)-1)=(x+y)(x-y-1)$

Ejemplo 24 $6bc-9c^2-12cd-8be+12ce+16de$ *agrupemos los términos en dos grupos de tres términos cada uno, (la agrupación que se hace no es la única posible)* $\left(6bc-9c^2-12cd\right)-(8be-12ce-16de)$ *el primer grupo tiene un factor común que es* $3c$*, y en el segundo, el factor común es* $4e \Longrightarrow \left(6bc-9c^2-12cd\right)-(8be-12ce-16de)=3c\left(2b-3c-4d\right)-4e\left(2b-3c-4d\right)$*. Ahora, el factor común es* $2b-3c-4d$ *y la expresión se factoriza como:* $(2b-3c-4d)(3c-4e)$*.*

Ejemplo 25 *Una expresión de la forma* $a\left(x^n\right)^2+bx^n+c$*, se puede factorizar en dos factores reales de la forma* $(dx^n-e)(kx^n-m)$ *con* $dk=a, dm+ek=b, em=c$ *siempre y cuando,* $b^2-4ac\geq 0$*.*

$$6x^{10}+5x^5-6=6\left(x^5\right)^2+5x^5-6=6\left(y\right)^2+5y-6$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} y &= \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-6)}}{2 \cdot 6} \\ &= \frac{-5 \pm \sqrt{169}}{12} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow y = \dfrac{-18}{12} = \dfrac{-3}{2} \vee y = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3} \Longrightarrow$

$$\begin{aligned} 6y^2 + 5y - 6 &= \left(y + \frac{3}{2}\right)\left(y - \frac{2}{3}\right) \\ &= (2y+3)(3y-2) \\ &= \left(2x^5 + 3\right)\left(3x^5 - 2\right) \end{aligned}$$

Ejemplo 26 *Una expresión de la forma* $x^n + a^n$ *cuando* n *es impar se factoriza como* $(x+a)\left(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - a^3x^{n-4} + ... + a^{n-1}\right)$, *cuando* n *es par, no siempre es factorizable en los reales. Si* n *es par y también es múltiplo de 3 se puede factorizar como una suma de cubos:* $x^6 + 1 = \left(x^2\right)^3 + 1^3 = \left(x^2+1\right)\left(x^4 - x^2 + 1\right)$.

En general, si para el polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$, hay un número real b, para el cual $p(b) = 0$ se puede afirmar que $x - b$ es un factor de $p(x)$.No siempre es fácil encontrar los valores de b para los cuales $p(b) = 0$, pero, números de la forma $\frac{m}{n}$ donde m es un divisor de a_0 y n es un divisor de a_n son candidatos a cumplir esta función. Números de esta forma se les llama *ceros racionales.* El polinomio $p(x) = x^3 + 3x^2 - 3x - 1$ tiene como candidatos a ceros racionales el conjunto $\{-1, 1\}$. $p(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 - 3(-1) - 1 = -1 + 3 + 3 - 1 = 4 \neq 0$, $x+1$ no es un factor. $(1)^3 + 3(1)^2 - 3(1) - 1 = 1 + 3 - 3 - 1 = 0$ por tanto $x - 1$ es un factor. El polinomio se factoriza como $(x-1)\left(x^2 + 4x + 1\right)$. ¿Es el polinomio $x^2 + 4x + 1$ factorizable en los reales?

$q(x) = 3x^4 + 17x^3 + 21x^2 - 3x - 2$ tiene como candidatos a ceros racionales al conjunto $\left\{\pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}\right\}$,

$$\begin{aligned} q\left(\frac{1}{3}\right) &= 3\left(\frac{1}{3}\right)^4 + 17\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 21\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{3}\right) - 2 \\ &= \frac{3}{3^4} + \frac{17}{3^3} + \frac{21}{3^2} - \frac{3}{3} - 2 \\ &= \frac{1}{27} + \frac{17}{27} + \frac{21}{9} - 1 - 2 \\ &= \frac{18}{27} + \frac{21}{9} - 3 = \frac{6}{9} + \frac{21}{9} - 3 = \frac{27}{9} - 3 = 3 - 3 = 0 \end{aligned}$$

Por tanto $x - \frac{1}{3}$ es un factor y $3x^4 + 17x^3 + 21x^2 - 3x - 2 = \left(x - \frac{1}{3}\right)c(x)$ ¿Quién es $c(x)$? ¿Tiene $q(x)$ algún otro cero racional? Obsérvese que en este caso es equivalente a encontrar un par de números que sumados den como resultado b y multiplicados c

Ejercicio 27 *Factorizar cada uno de los siguientes polinomios*

1. $64 - 324x^4$
2. $81x^9 - 256y^8x$
3. $9a^3 - 4b^2c^2a$
4. $x^6 + y^9$
5. $x^2 + 10x + 16$
6. $15x^2 + 11x - 12$
7. $40x^2 + 6xy - 70y^2$
8. $12x^2 - x(2y - 3z) - 6(2y - 3z)^2$
9. $12x^4 - 13x^3 + 3x^2$
10. $x^3 - y^3 - x^2 + y^2$

3 Fracciones algebraícas.

Si p y q son polinomios, la expresión de la forma $\frac{p}{q}$ recibe el nombre de fracción algebraíca .

Ejemplo 28 $\dfrac{x^2 - 5x + 3}{x + 6}$,$\dfrac{x^2 + 7}{x^4 - 2x + 4}$.

Las fracciones algebraicas pueden simplificarse, simplificar una fracción algebraíca consiste en descomponer su numerador y su denominador en factores irreducibles en $\mathbb{R}$ y eliminar todos los factores que sean comunes al numerador y al denominador.

Ejemplo 29 $\dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 + 5x + 6} = \dfrac{(x+3)(x-2)}{(x+3)(x+2)} = \dfrac{x-2}{x+2}$

Definimos la suma de fracciones algebraícas asi: si $\frac{p}{q}$ y $\frac{r}{s}$ son fracciones algebraícas, $\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \dfrac{ps + rq}{qs}$.

Ejemplo 30 $\dfrac{1}{x} + \dfrac{x^2 - 5}{x} = \dfrac{1 + x^2 - 5}{x} = \dfrac{x^2 - 4}{x}$

Ejemplo 31 $\dfrac{3 + 2x}{x + 3} + \dfrac{4 + x^2}{x + 4} =$

$$\begin{aligned} & \frac{(3+2x)(x+4) + (x+3)\left(4+x^2\right)}{(x+3)(x+4)} \\ = & \frac{x^3 + 5x^2 + 15x + 24}{x^2 + 7x + 12} \end{aligned}$$

Ejemplo 32 $\dfrac{x^2-8x+15}{x^2+9x+20}+\dfrac{2x^2+7x-15}{x^2+3x-4}$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(x-3)(x-5)}{(x+5)(x+4)}+\frac{(x+5)(2x-3)}{(x+4)(x-1)}\\
&= \frac{(x-3)(x-5)(x-1)}{(x+5)(x+4)(x-1)}+\frac{(x+5)(2x-3)(x+5)}{(x+5)(x+4)(x-1)}\\
&= \frac{(x-3)(x-5)(x-1)+(x+5)(2x-3)(x+5)}{(x+5)(x+4)(x-1)}=\\
&= \frac{3x^3+8x^2+43x-90}{(x+5)(x+4)(x-1)}=\frac{3x^3+8x^2+43x-90}{x^3+8x^2+11x-20}
\end{aligned}
$$

La resta se define como $\frac{p}{q}-\frac{r}{s}=\frac{p}{q}+\left(-\frac{r}{s}\right)$

Ejemplo 33 $\dfrac{x-11}{x+5}-\dfrac{x^2-3x-1}{x^2-25}=$

$$
\begin{aligned}
&\frac{x-11}{x+5}+\frac{-\left(x^2-3x-1\right)}{x^2-25}\\
&= \frac{(x-11)(x-5)}{x^2-25}+\frac{-\left(x^2-3x-1\right)}{x^2-25}\\
&\frac{(x-11)(x-5)+\left(-\left(x^2-3x-1\right)\right)}{x^2-25}\\
&= \frac{x^2-16x+55-x^2+3x+1}{x^2-25}\\
&= \frac{-13x+56}{x^2-25}
\end{aligned}
$$

El producto se define como $\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}=\frac{p\cdot r}{q\cdot s}$

Ejemplo 34 $\dfrac{x+7}{x^2-2x-35}\cdot\dfrac{x^2-25}{x^2+14x+49}=$

$$
\begin{aligned}
&\frac{(x+7)\left(x^2-25\right)}{\left(x^2-2x-35\right)\left(x^2+14x+49\right)}\\
&= \frac{(x+7)(x-5)(x+5)}{(x-7)(x+5)(x+7)^2}\\
&= \frac{(x-5)}{(x-7)(x+7)}=\frac{(x-5)}{x^2-49}
\end{aligned}
$$

La división se define como $\frac{p}{q}\div\frac{r}{s}=\frac{p}{q}\cdot\frac{s}{r}=\frac{p\cdot s}{q\cdot r}$

Ejemplo 35 $\dfrac{x^2-25}{x^2+14x+49} \div \dfrac{x+7}{x^2-2x-35} =$

$$\begin{aligned} & \frac{x^2-25}{x^2+14x+49} \cdot \frac{x^2-2x-35}{x+7} \\ = & \frac{\left(x^2-25\right)\left(x^2-2x-35\right)}{\left(x^2+14x+49\right)(x+7)} \\ = & \frac{(x-5)(x+5)(x-7)(x+5)}{(x+7)^2(x+7)} \\ = & \frac{(x-5)(x+5)^2(x-7)}{(x+7)^3} \end{aligned}$$

3.1 Fracciones complejas

Una fracción compleja es una fracción en la que su denominador o en su numerador hay a su vez fracciones.

Ejemplo 36 $\dfrac{1+\dfrac{x}{y}}{x+\dfrac{y}{x}}, \quad \dfrac{\dfrac{4x}{x^2-2}+\dfrac{x}{x+1}}{3+x^3}$

Si se necesita transformar una fracción compleja en una fracción simple, se reducen, mediante operaciones algebraícas el numerador y el denominador de la fracción, y se eliminan todos los factores posibles

Ejemplo 37 $\dfrac{x-\dfrac{x}{x+2}}{x+\dfrac{1}{x^2+3x+2}}$ *Observe que* $x^2+3x+2=(x+2)(x+1) \Longrightarrow$

$\dfrac{x-\dfrac{x}{x+2}}{x+\dfrac{1}{x^2+3x+2}} =$

$$\begin{aligned} \frac{\dfrac{x(x+2)-x}{x+2}}{\dfrac{x(x+2)(x+1)+1}{(x+2)(x+1)}} &= \frac{\dfrac{x^2+2x-x}{x+2}}{\dfrac{x^3+3x^2+2x+1}{(x+2)(x+1)}} \\ \frac{\dfrac{x^2+x}{x+2}}{\dfrac{x^3+3x^2+2x+1}{(x+2)(x+1)}} &= \frac{\dfrac{x(x+1)}{x+2}}{\dfrac{x^3+3x^2+2x+1}{(x+2)(x+1)}} \\ \frac{x(x+1)(x+2)(x+1)}{(x+2)\left(x^3+3x^2+2x+1\right)} &= \frac{x(x+1)^2}{x^3+3x^2+2x+1} \end{aligned}$$

1. Reescribe la fracción dada de tal manera que obtengas una fracción equivalente, con la expresión que se encuentra a la derecha de la coma como denominador.

   (a) $\dfrac{a+3b}{5ab^2}, (5ab)^3$

   (b) $\dfrac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}$

2. Reducir cada fracción a su expresión mínima.

   (a) $\dfrac{x^2+x-6}{x^2+5x+6}$

   (b) $\dfrac{(w+2z)\left(6w^2+7wz-3z^2\right)}{(3w-z)\left(2w^2-wz-6z^2\right)}$

   (c) $\dfrac{x^9+y^9}{x^6-y^6}$

   (d) $\dfrac{3ah+4bk-2ak-6bh}{2ah-4bh+ak-2bk}$

3. Efectuar la operación indicada y reducir cada resultado a su expresión mínima.

   (a) $\dfrac{3x-3y}{2x+4y}\cdot\dfrac{x+2y}{x-y}$

   (b) $\dfrac{x^2-9y^2}{2x+y}\div\left(3x^2-9xy\right)$

   (c) $\dfrac{x^3+8y^3}{x^2-4y^2}\cdot\dfrac{x^2+2xy-3y^2}{9x^2+3xy+y^2}\div\dfrac{x^2-9y^2}{yx+3y^2}$

   (d) $\dfrac{15x-4}{5x-3}-2$

   (e) $\dfrac{9x^2-4y^2}{12xy}+\dfrac{2y}{6x}-\dfrac{-5x}{4y}$

   (f) $\dfrac{2}{(a+3b)}-\dfrac{3}{(a+3b)(a-2b)}+\dfrac{5}{(a+b)(a-2b)}$

   (g) $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{8}-x$

4. Transformar las fracciones complejas en fracciones simples.

   (a) $\dfrac{x-\frac{16}{x}}{1-\frac{4}{x}}$

   (b) $\dfrac{2a-\dfrac{3a+4}{a-2}}{a-\dfrac{10a+4}{2a+3}}$

(c) $$\frac{\dfrac{p+2}{p-2} - \dfrac{p}{p+2}}{3 - \dfrac{4}{p+2}}$$

(d) $$\frac{1 + \dfrac{1}{x}}{1 - \dfrac{1}{1 + \dfrac{2}{x-4}}}$$